Università degli Studi 'La Sapienza'

Facoltà di Economia

Anno accademico 2012 - 13

Matematica Finanziaria
Canale D - K

Capitolo 1
Leggi e regimi finanziari

Antonio Annibali

Capitolo 1 – Leggi e regimi finanziari

Esercizio 1.8 (4) - Calcolo di interessi e sconti >>>

Esercizio 1.8 (5) - Calcolo di tassi di interesse e di sconto >>>

Esercizio 1.8 (6) - Calcolo del tempo >>>

Esercizio 1.8 (7) - Calcolo di capitali impiegati >>>

Esercizio 1.8 (8) - Calcolo del periodo di raddoppio (1) >>>

Esercizio 1.8 (9) - Calcolo del periodo di raddoppio (2) >>>

1.9 - Regime finanziario "uniforme" e "non scindibile" dell'interesse semplice (e dello sconto razionale) – Regime lineare

Esercizio 1.9 (1) - Funzioni finanziarie al variare della durata >>>

Esercizio 1.9 (2) - Calcolo di montanti >>>

Esercizio 1.9 (3) - Calcolo di valori attuali >>>

Esercizio 1.9 (4) - Calcolo di interessi e sconti >>>

Esercizio 1.9 (5) - Calcolo di tassi di interesse e di sconto >>>

Esercizio 1.9 (6) - Calcolo del tempo >>>

Esercizio 1.9 (7) - Calcolo di capitali impiegati >>>

Esercizio 1.9 (8) - Calcolo del periodo di raddoppio (2) >>>

1.10 - Regime finanziario "uniforme" e "non scindibile" dello sconto commerciale (e dell'interesse iperbolico) – Regime iperbolico

Esercizio 1.12 (5) - Calcolo di montanti >>>

Esercizio 1.12 (6) - Calcolo di valori attuali >>>

Esercizio 1.12 (7) - Calcolo di tassi di interesse e di sconto >>>

Esercizio 1.12 (8) - Calcolo del tempo >>>

Esercizio 1.12 (9) - Calcolo di capitali impiegati >>>

Capitolo 1 – Leggi e regimi finanziari

1.1– Oggetto della Matematica Finanziaria

La Matematica Finanziaria è una matematica applicata, che utilizza concetti e metodologie di vari rami della matematica e comporta

- ***aspetti teorici ossia formalizzazione di modelli (algoritmi) matematici per la teorizzazione di problemi finanziari,***
- ***aspetti pratici come, ad esempio, l'utilizzazione di strumenti computazionali per l'effettuazione dei calcoli necessari per la risoluzione di problemi finanziari reali.***

Prerequisiti della Matematica Finanziaria sono la conoscenza di

- ***Algebra, per gli sviluppi teorici di tipo discreto,***
- ***Analisi matematica, per gli sviluppi teorici di tipo continuo,***
- ***Calcolo delle probabilità, per lo studio di problemi aleatori,***
- ***Informatica, per lo studio e la risoluzione di problemi di tipo computazionale.***

La Matematica Finanziaria è classificabile in

- ***MF (finanziaria) degli investimenti di tipo deterministico (in condizioni di certezza) oppure di tipo aleatorio (in condizioni di incertezza),***

- ***MA** (attuariale) delle assicurazioni libere (in caso vita o morte), dei rami elementari (danni ed RCA) e sociali (vecchiaia, morte, invalidità).*

Oggetto della Matematica finanziaria sono le attività finanziarie (monetizzabili) ossia scambi monetari equi di capitali disponibili in tempi diversi (e/o monete diverse e/o luoghi diversi effettuati) nel cosidetto Mercato dei Capitali

- ***investimenti** (ad esempio: finanziamenti),*

- ***prestiti** (ad esempio: anticipazioni).*

1.2– Operazioni finanziarie

*Considerando operazioni finanziarie in condizioni di certezza, l'elemento fondamentale della Matematica Finanziaria è la **prestazione finanziaria** ossia l'ente matematico costituito da una coppia ordinata di valori:*

- *importo*
- *epoca di disponibilità*

$$\boxed{(importo, epoca)}$$

Un'operazione finanziaria elementare si può definire come un contratto mediante il quale un primo soggetto scambia con un secondo soggetto un determinato importo P_x disponibile a una certa epoca x

$$\boxed{(P_x, x)}$$

con un altro importo M_y disponibile ad un'altra epoca y

$$\boxed{(M_y, y)}$$

Supponendo che sia $y > x$ $(y \geq x)$ è plausibile ritenere che risulti

$$\boxed{M_y > P_x \quad (M_y \geq P_x)}$$

L'equità dell'operazione finanziaria (ossia l'equivalenza delle prestazioni finanziarie) è indicabile con la notazione

$$\boxed{(P_x, x) \approx (M_y, y)}$$

Nota: La preferenza della prestazione finanziaria (P_x,x) rispetto alla prestazione (M_y,y) si indica invece con

$$\boxed{(P_x, x) \succ (M_y, y)}$$

e simmetricamente la preferenza della prestazione finanziaria (M_y,y) rispetto alla prestazione (P_x,x) si indica con

$$\boxed{(P_x, x) \prec (M_y, y)}$$

L'operazione finanziaria elementare si definisce di investimento quando l'elemento fissato della transazione è l'importo P_x, mentre l'importo M_y costituisce l'oggetto della contrattazione. In questo caso si può più precisamente indicare

- *Data dell'investimento* x
- *Scadenza dell'investimento* y $(> x)$ $(\geq x)$
- *Periodo dell'investimento* $[x,y]$
- *Durata dell'investimento* $y - x$ (> 0) (≥ 0)
- *Capitale iniziale disponibile* P_x
- *Montante finale* M_y $(> P_x)$ $(\geq P_x)$

$$\begin{array}{ccc} P_x & \rightarrow & M_y \\ \hline x & \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{y-x} & y \end{array}$$

- ***Interesse** prodotto dall'investimento nell'intervallo [x,y]*

$$\boxed{I_{x,y} = M_y - P_x > 0 \quad (\geq 0)} \qquad \boxed{M_y = P_x + I_{x,y}}$$

L'operazione finanziaria elementare si definisce di anticipazione quando l'elemento fissato della transazione è invece l'importo M_y, mentre l'importo P_x costituisce l'oggetto della contrattazione. Analogamente al caso precedente, in questo caso si indicano

- ***Data di disponibilità*** y
- ***Epoca di anticipazione*** $x \ (< y) \ (\leq y)$
- ***Periodo di anticipazione*** $[x,y]$
- ***Durata dell'anticipazione*** $y - x \ (> 0) \ (\geq 0)$
- ***Capitale finale disponibile*** M_y
- ***Valore attuale iniziale*** $P_x \ (< M_y) \ (\leq M_y)$

$$\begin{array}{ccc} P_x & \leftarrow & M_y \\ \hline x & \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{y-x} & y \end{array}$$

- ***Sconto** generato dall'anticipazione nell'intervallo [x,y]*

$$\boxed{D_{x,y} = M_y - P_x > 0 \quad (\geq 0)} \qquad \boxed{P_x = M_y - D_{x,y}}$$

1.3 – Il mercato dei capitali – Funzioni finanziarie

Un mercato di capitali si definisce perfetto, se gode delle seguenti caratteristiche:

- ***tutti gli operatori usufruiscono (gratuitamente) delle stesse informazioni relative al mercato,***
- ***ciascun operatore non è in condizione di quantificare le conseguenze di una sua propria azione sul mercato,***
- ***nel mercato non si pagano imposte su trasferimenti di titoli, commissioni di intermediazione e costi di transazione,***
- ***le operazioni finanziarie sono infinitamente divisibili ed effettuabili in ogni istante,***
- ***ogni operatore finanziario è un massimizzatore di profitti, ossia ogni sua operazione è tesa a raggiungere il massimo risultato economico con il minimo costo, nel senso che tra due importi disponibili (da incassare) alla stessa epoca l'operatore preferisce quello di ammontare maggiore e tra due importi di uguale ammontare disponibili (da incassare) ad epoche diverse preferisce quello con disponibilità anteriore (ovvero, tra due importi da pagare alla stessa epoca l'operatore preferisce quello di ammontare minore e tra due importi di uguale ammontare da pagare ad epoche diverse preferisce quello con scadenza posteriore).***

❖ ***Esempio: L'operazione finanziaria seguente è da considerare equa, se le due prestazioni finanziarie (disponibilità) che la caratterizzano sono equivalenti***

$$\boxed{(P_4,4)=(1000,4)\approx(1200,9)=(M_9,9)}$$

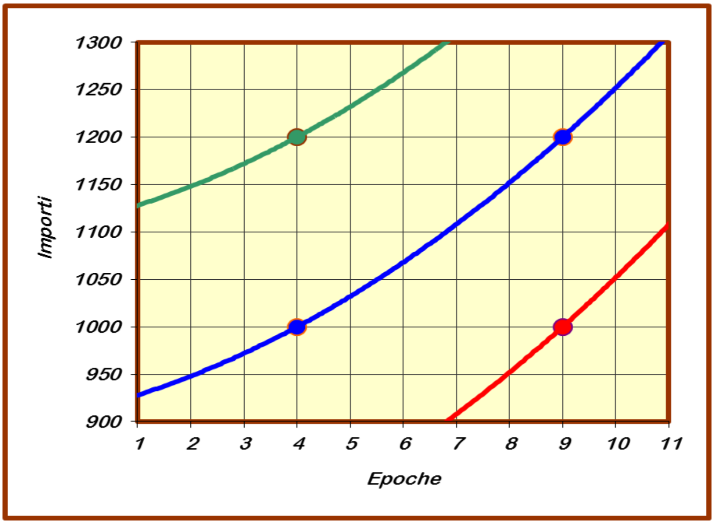
$$\begin{array}{ccc} 1000 & \approx & 1200 \\ \hline \multicolumn{3}{c}{\underbrace{4 \qquad\qquad\qquad 9}_{5}} \end{array}$$

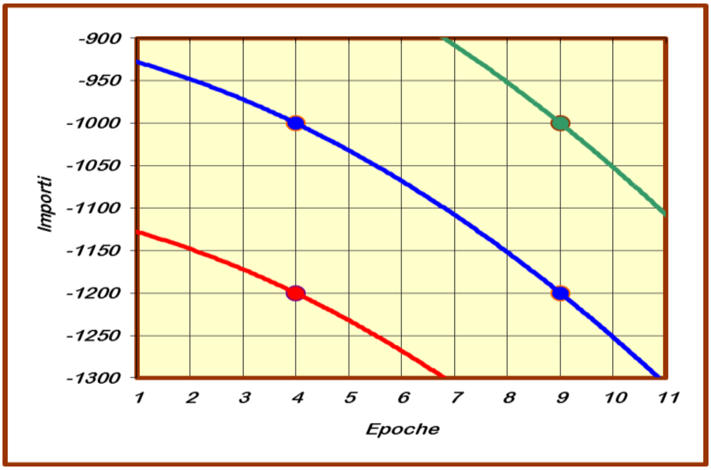
e, per quanto detto in precedenza, risulta

$$\boxed{(1200,4) \succ (1000,4) \approx (1200,9) \succ (1000,9)}$$

e simmetricamente, nel caso di pagamenti

$$\boxed{(-1000,9) \succ (-1200,9) \approx (-1000,4) \succ (-1200,4)}$$





In un mercato di capitali perfetto lo scambio equo tra due fissati importi P_x e M_y comporta l'esistenza di due funzioni, tali che, considerando noti gli altri elementi, permettono di definire:

- ***il montante in una operazione di investimento***

$$\boxed{M_y = f(x, P_x, y)} \qquad \boxed{(M_y, y) = (f(x, P_x, y), y) \approx (P_x, x)}$$

- ***il valore attuale in una operazione di anticipazione***

$$\boxed{P_x = g(x, M_y, y)} \qquad \boxed{(P_x, x) = (g(x, M_y, y), x) \approx (M_y, y)}$$

Ipotizzando che le due funzioni (di scambio) siano regolari (continue, derivabili parzialmente e con derivate parziali continue) e che la funzione $M_y = f(,,)$ sia

- ***crescente rispetto al capitale P_x (il montante finale M_y cresce all'aumentare del capitale impiegato)***

- ***crescente (non decrescente) rispetto ad y (il montante finale M_y cresce (non decresce) per la posticipazione della scadenza ossia all'aumentare della durata dell'investimento)***

- ***decrescente (non crescente) rispetto ad x (il montante finale M_y decresce (non cresce) per la posticipazione della data iniziale ossia al diminuire della durata dell'investimento)***

e che la funzione $P_x = g(,,)$ sia

- ***crescente rispetto al montante M_y (il valore attuale iniziale P_x cresce all'aumentare del capitale finale disponibile)***

- ***crescente (non decrescente) rispetto ad x (il valore attuale iniziale P_x cresce (non decresce) per la posticipazione della data iniziale ossia al diminuire della durata dell'investimento)***

- ***decrescente (non crescente) rispetto ad y (il valore attuale iniziale P_x decresce (non cresce) per la posticipazione della scadenza ossia all'aumentare della durata dell'investimento)***

fissati x ed y, le due funzioni f(,,) e g(,,) risultano l'una l'inversa dell'altra e quindi basta conoscerne una per ottenere l'altra.

Se si suppone che per gli operatori del mercato l'utilità marginale del denaro sia costante, allora, per le operazioni finanziarie, vale la proprietà di proporzionalità o indipendenza dall'importo e le due funzioni di scambio precedentemente indicate possono piú semplicemente scriversi

$$\boxed{M_y = f(x,P_x,y) = P_x \cdot f(x,1,y) = P_x \cdot r_{x,y}}$$

$$\boxed{P_x = g(x,M_y,y) = M_y \cdot g(x,1,y) = M_y \cdot v_{x,y}}$$

da cui

$$\boxed{r_{x,y} = \frac{M_y}{P_x} > 1 \quad (\geq 1)} \qquad \frac{1 \qquad \rightarrow \qquad r_{x,y}}{\underbrace{x \qquad\qquad\qquad y}_{y-x}}$$

$$\boxed{v_{x,y} = \frac{P_x}{M_y} < 1 \quad (\leq 1)} \qquad \frac{v_{x,y} \qquad \leftarrow \qquad 1}{\underbrace{x \qquad\qquad\qquad y}_{y-x}}$$

con le ovvie condizioni

$$\boxed{r_{x,y} = \frac{1}{v_{x,y}}} \qquad \boxed{v_{x,y} = \frac{1}{r_{x,y}}}$$

$$\boxed{r_{x,y} \cdot v_{x,y} = 1}$$

Le due grandezze finanziarie ottenute sono dimensionalmente numeri puri (in quanto derivanti dal rapporto di due importi):

- ***$r_{x,y}$: montante unitario (fattore di capitalizzazione), ossia montante all'epoca y di ogni unità monetaria del capitale P_x investito al tempo x***

  crescente (non decrescente) rispetto ad y (per la posticipazione della scadenza ossia all'aumentare della durata dell'investimento)

  decrescente (non crescente) rispetto ad x (per la posticipazione della data iniziale ossia al diminuire della durata dell'investimento)

  neutro per operazioni di durata nulla

$$\boxed{\frac{\partial r_{x,y}}{\partial y} > 0 \quad (\geq 0)} \qquad \boxed{\frac{\partial r_{x,y}}{\partial x} < 0 \quad (\leq 0)} \qquad \boxed{r_{x,x} = 1}$$

- ***$v_{x,y}$: valore attuale unitario (fattore di attualizzazione), ossia valore attuale all'epoca x di ogni unità monetaria del capitale M_y disponibile al tempo y***

  crescente (non decrescente) rispetto ad x (per la posticipazione della data iniziale ossia al diminuire della durata dell'investimento)

  decrescente (non crescente) rispetto ad y (per la posticipazione della scadenza ossia all'aumentare della durata dell'investimento)

  neutro per operazioni di durata nulla

$$\boxed{\frac{\partial v_{x,y}}{\partial x} > 0 \quad (\geq 0)} \qquad \boxed{\frac{\partial v_{x,y}}{\partial y} < 0 \quad (\leq 0)} \qquad \boxed{v_{y,y} = 1}$$

1.4– Ulteriori funzioni finanziarie

- ***Interesse unitario** generato nell'intervallo (x,y) da ogni unità del capitale P_x investito al tempo x*

$$\boxed{i_{x,y}=\frac{I_{x,y}}{P_x}=\frac{M_y-P_x}{P_x}=\frac{M_y}{P_x}-1=r_{x,y}-1=\frac{1}{v_{x,y}}-1=\frac{1-v_{x,y}}{v_{x,y}}>0\quad(\geq 0)}$$

$$\overset{i_{x,y}}{\underbrace{x \qquad\qquad\qquad\qquad y}_{y-x}}\qquad \boxed{r_{x,y}=1+i_{x,y}}\qquad \boxed{v_{x,y}=\frac{1}{1+i_{x,y}}}$$

crescente (non decrescente) rispetto ad y (per la posticipazione della scadenza ossia all'aumentare della durata dell'investimento)

decrescente (non crescente) rispetto ad x (per la posticipazione della data iniziale ossia al diminuire della durata dell'investimento)

nullo per operazioni di durata nulla

$$\boxed{\frac{\partial i_{x,y}}{\partial y}>0\quad(\geq 0)}\qquad \boxed{\frac{\partial i_{x,y}}{\partial x}<0\quad(\leq 0)}\qquad \boxed{i_{x,x}=0}$$

- ***Sconto unitario** generato nell'intervallo (x,y) da ogni unità del capitale finale M_y disponibile al tempo y*

$$\boxed{d_{x,y}=\frac{D_{x,y}}{M_y}=\frac{M_y-P_x}{M_y}=1-\frac{P_x}{M_y}=1-v_{x,y}=1-\frac{1}{r_{x,y}}=\frac{r_{x,y}-1}{r_{x,y}}>0\quad(\geq 0)}$$

$$\begin{array}{l} d_{x,y} \\ \hline x \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{y-x} y \end{array} \qquad \boxed{v_{x,y} = 1 - d_{x,y}} \qquad \boxed{r_{x,y} = \frac{1}{1-d_{x,y}}}$$

crescente (non decrescente) rispetto ad y (per la posticipazione della scadenza ossia all'aumentare della durata dell'investimento)

decrescente (non crescente) rispetto ad x (per la posticipazione della data iniziale ossia al diminuire della durata dell'investimento)

nullo per operazioni di durata nulla

$$\boxed{\frac{\partial d_{x,y}}{\partial x} > 0 \quad (\geq 0)} \qquad \boxed{\frac{\partial d_{x,y}}{\partial y} < 0 \quad (\leq 0)} \qquad \boxed{d_{y,y} = 0}$$

Anche l'interesse e lo sconto unitari sono dimensionalmente numeri puri in quanto derivanti dal rapporto di due importi.

- ***Relazioni tra interesse e sconto unitari***

$$\boxed{1 = r_{x,y}\, v_{x,y} = (1 + i_{x,y})\,(1 - d_{x,y})}$$

la differenza tra le funzioni dell'interesse e dello sconto unitari corrisponde al loro prodotto

$$\boxed{1 + i_{x,y} - d_{x,y} - i_{x,y}\, d_{x,y} = 1 \;\Rightarrow\; i_{x,y} - d_{x,y} - i_{x,y}\, d_{x,y} = 0}$$

$$\boxed{i_{x,y} - d_{x,y} = i_{x,y}\, d_{x,y}}$$

il valore della funzione dell'interesse unitario corrisponde al montante della funzione dello sconto unitario

$$i_{x,y} = \frac{1 - v_{x,y}}{v_{x,y}} = \frac{d_{x,y}}{v_{x,y}} = \frac{d_{x,y}}{1 - d_{x,y}} = d_{x,y} \cdot r_{x,y}$$

il valore della funzione dello sconto unitario corrisponde al valore attuale della funzione dell'interesse unitario

$$d_{x,y} = \frac{r_{x,y} - 1}{r_{x,y}} = \frac{i_{x,y}}{r_{x,y}} = \frac{i_{x,y}}{1 + i_{x,y}} = i_{x,y} \cdot v_{x,y}$$

Esercizio 1.4 (1) - Funzioni finanziarie >>>

L'interesse (e lo sconto) unitario (generato nell'intervallo (x,y) da ogni unità del capitale) precedentemente introdotti sono anche denominati tassi periodali (rispetto ad una fissata unità di misura di tipo temporale, ad esempio l'anno) d'interesse (e di sconto), in quanto corrispondono all'interesse (e lo sconto) per unità di capitale nell'intervallo di tempo (x,y). Lo schema generale delle relazioni esistenti tra le funzioni finanziarie risulta

	$\boxed{r_{x,y}}$	$\boxed{v_{x,y}}$	$\boxed{i_{x,y}}$	$\boxed{d_{x,y}}$
$\boxed{r_{x,y}} =$	...	$\frac{1}{v_{x,y}}$	$1 + i_{x,y}$	$\frac{1}{1 - d_{x,y}}$
$\boxed{v_{x,y}} =$	$\frac{1}{r_{x,y}}$	...	$\frac{1}{1 + i_{x,y}}$	$1 - d_{x,y}$
$\boxed{i_{x,y}} =$	$r_{x,y} - 1$	$\frac{1 - v_{x,y}}{v_{x,y}}$	...	$\frac{d_{x,y}}{1 - d_{x,y}}$
$\boxed{d_{x,y}} =$	$\frac{r_{x,y} - 1}{r_{x,y}}$	$1 - v_{x,y}$	$\frac{i_{x,y}}{1 + i_{x,y}}$	...

Esercizio 1.4 (2) - Schema generale delle funzioni finanziarie >>>

1.5– Scindibilità di leggi finanziarie

Un regime finanziario rappresenta il principio (ossia il modello, la regola) in base al quale effettuare le valutazioni finanziarie. Fissando i parametri di detto modello matematico è possibile definire gli algoritmi di calcolo, denominati leggi finanziarie di tale regime finanziario.

Una legge finanziaria si dice scindibile se, comunque si consideri un'epoca intermedia compresa nell'intervallo caratterizzante un'operazione finanziaria, risulta

$$\boxed{r_{x,y} = r_{x,u} \cdot r_{u,y} \quad , \ \forall u \in [x,y]}$$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \overbrace{\quad\rightarrow\quad}^{r_{x,u}} & r_{x,u} & \overbrace{\quad\rightarrow\quad}^{r_{u,y}} & r_{x,y} \\ \hline x & \underbrace{\qquad\qquad}_{u-x} & u & \underbrace{\qquad\qquad}_{y-u} & y \end{array}$$

ossia il valore del montante finale non cambia se ad un'epoca intermedia l'operazione finanziaria di capitalizzazione viene interrotta (disinvestendo il montante accumulato nel primo periodo) e immediatamente ripresa (reinvestendo tale montante per il secondo periodo).

- ***Esempio: Al tempo x un soggetto A presta ad un soggetto B un importo P_x con l'impegno di restituzione al tempo y (> x) di un importo M_y (> P_x)***

$$\boxed{M_y = P_x \cdot r_{x,y}}$$

ad un tempo intermedio u ($x < u < y$) i due soggetti concordano di anticipare la scadenza del contratto e di effettuare la valutazione dell'importo M_u, che il soggetto B deve restituire al soggetto A, nei due diversi modi:

- ***retrospettivamente (da parte del soggetto B (debitore)), il quale considera che l'operazione finanziaria, iniziata al***

tempo x, si è conclusa al tempo u e il suo debito è quindi rappresentato dal montante al tempo u dell'importo prestato

$$\boxed{M_u^{(r)} = P_x \cdot r_{x,u}}$$

- ***prospettivamente (da parte del soggetto A (creditore)), il quale considera che l'operazione finanziaria, iniziata al tempo x, doveva essere conclusa al tempo y e quindi il suo credito è rappresentato dal valore attuale al tempo u dell'importo da restituire***

$$\boxed{M_u^{(p)} = M_y \cdot v_{u,y} = P_x \cdot r_{x,y} \cdot v_{u,y} = P_x \cdot \frac{r_{x,y}}{r_{u,y}}}$$

i due importi coincidono se

$$\boxed{M_u^{(r)} = M_u^{(p)} \;\Rightarrow\; P_x \cdot r_{x,u} = P_x \cdot \frac{r_{x,y}}{r_{u,y}} \;\Rightarrow\; r_{x,u} \cdot r_{u,y} = r_{x,y}}$$

che rappresenta, appunto, la condizione di scindibilità di una legge finanziaria.

Ricordando la relazione esistente tra il fattore di capitalizzazione e quello di attualizzazione, risulta immediatamente

$$\boxed{\frac{1}{v_{x,y}} = \frac{1}{v_{x,u}} \cdot \frac{1}{v_{u,y}} \;\Rightarrow\; v_{x,y} = v_{x,u} \cdot v_{u,y} \qquad \forall u \in [x,y]}$$

$$\begin{array}{ccccc} v_{x,y} & \overbrace{\leftarrow}^{v_{x,u}} & v_{u,y} & \overbrace{\leftarrow}^{v_{u,y}} & 1 \\ \hline x & \underbrace{\qquad}_{u-x} & u & \underbrace{\qquad}_{y-u} & y \end{array}$$

ossia il valore attuale iniziale non cambia se ad un'epoca intermedia l'operazione finanziaria di attualizzazione viene interrotta (determinando il valore attualizzato relativamente al

secondo periodo) e immediatamente ripresa (riattualizzando tale valore attuale relativamente al primo periodo).

Ovviamente le condizioni di scindibilità precedenti valgono anche nel caso di considerazione di un numero qualsiasi di epoche intermedie comprese nell'intervallo caratterizzante l'operazione finanziaria.

Ad esempio, nel caso di due epoche intermedie, si ha

$$\boxed{\begin{aligned} r_{x,y} &= r_{x,u_1} \cdot r_{u_1,u_2} \cdot r_{u_2,y} \\ &\forall (u_1,u_2) \in [x,y] \end{aligned}}$$

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \overbrace{\rightarrow}^{r_{x,u_1}} & r_{x,u_1} & \overbrace{\rightarrow}^{r_{u_1,u_2}} & r_{x,u_2} & \overset{r_{u_2,y}}{\rightarrow} & r_{x,y} \\ \hline x & \underbrace{\qquad}_{u_1-x} & u_1 & \underbrace{\qquad}_{u_2-u_1} & u_2 & \underbrace{\qquad}_{y-u_2} & y \end{array}$$

$$\boxed{\begin{aligned} v_{x,y} &= v_{x,u_1} \cdot v_{u_1,u_2} \cdot v_{u_2,y} \\ &\forall (u_1,u_2) \in [x,y] \end{aligned}}$$

$$\begin{array}{ccccccc} v_{x,y} & \overbrace{\leftarrow}^{v_{x,u_1}} & v_{u_1,y} & \overbrace{\leftarrow}^{v_{u_1,u_2}} & v_{u_2,y} & \overset{v_{u_2,y}}{\leftarrow} & 1 \\ \hline x & \underbrace{\qquad}_{u_1-x} & u_1 & \underbrace{\qquad}_{u_2-u_1} & u_2 & \underbrace{\qquad}_{y-u_2} & y \end{array}$$

e in generale, nel caso di n epoche intermedie,

$$\boxed{\left.\begin{aligned} r_{x,y} &= r_{x,u_1} \cdot \prod_{k=2}^{n} r_{u_{k-1},u_k} \cdot r_{u_n,y} \\ v_{x,y} &= v_{x,u_1} \cdot \prod_{k=2}^{n} v_{u_{k-1},u_k} \cdot v_{u_n,y} \end{aligned}\right\} \; , \; \forall \square_{k=1}^{n} u_k \in [x,y]}$$

ovvero, indicando simbolicamente x con u_0 e y con u_{n+1},

$$\boxed{\left.\begin{aligned} r_{x,y} &= \prod_{k=1}^{n+1} r_{u_{k-1},u_k} \\ v_{x,y} &= \prod_{k=1}^{n+1} v_{u_{k-1},u_k} \end{aligned}\right\} \; , \; \forall \square_{k=1}^{n} u_k \in [\underset{x}{u_0}, \underset{y}{u_{n+1}}]}$$

Considerando le definizioni introdotte d'interesse (e di sconto) unitario, le condizioni di scindibilità possono essere scritte nel modo seguente

$$\left.\begin{aligned}
(1+i_{x,y}) &= (1+i_{x,u})\cdot(1+i_{u,y}) \\
i_{x,y} &= i_{x,u}+i_{u,y}+i_{x,u}\cdot i_{u,y} \\
&= i_{x,u}+(1+i_{x,u})\cdot i_{u,y} \\
&= i_{x,u}+r_{x,u}\cdot i_{u,y}
\end{aligned}\right\} \quad , \ \forall u \in [x,y]$$

$$\begin{array}{ccccc}
\overbrace{1 \quad \rightarrow \quad}^{r_{x,u}} & r_{x,u} & & & \\
\hline
 & i_{x,u} & + & r_{x,u}\cdot i_{u,y} & \\
\hline
x & & u & & y \\
\multicolumn{2}{c}{\underbrace{\qquad\qquad}_{u-x}} & & \multicolumn{2}{c}{\underbrace{\qquad\qquad}_{y-u}}
\end{array}$$

ossia il valore dell'interesse unitario finale risulta pari alla somma dell'interesse prodotto nel primo periodo dal capitale unitario iniziale e dell'interesse prodotto nel secondo periodo dal montante accumulato alla fine del primo periodo

$$\left.\begin{aligned}
(1-d_{x,y}) &= (1-d_{x,u})\cdot(1-d_{u,y}) \\
d_{x,y} &= d_{x,u}+d_{u,y}-d_{x,u}\cdot d_{u,y} \\
d_{x,y} &= (1-d_{u,y})\cdot d_{x,u}+d_{u,y} \\
d_{x,y} &= v_{u,y}\cdot d_{x,u}+d_{u,y}
\end{aligned}\right\} \quad , \ \forall u \in [x,y]$$

$$\begin{array}{ccccc}
 & & v_{u,y} & \overbrace{\quad \leftarrow \quad 1}^{v_{u,y}} & \\
\hline
v_{u,y}\cdot d_{x,u} & + & d_{u,y} & & \\
\hline
x & & u & & y \\
\multicolumn{2}{c}{\underbrace{\qquad\qquad}_{u-x}} & & \multicolumn{2}{c}{\underbrace{\qquad\qquad}_{y-u}}
\end{array}$$

ossia il valore dello sconto unitario iniziale risulta pari alla somma dello sconto prodotto nel secondo periodo dal capitale unitario

finale e dello sconto prodotto nel primo periodo dal valore attualizzato all'inizio del secondo periodo.

Nel caso di due epoche intermedie, la condizione di scindibilità risulta

$$\boxed{\left.\begin{array}{l}(1+i_{x,y})=(1+i_{x,u_1})\cdot(1+i_{u_1,u_2})\cdot(1+i_{u_2,y})\\ i_{x,y}=i_{x,u_1}+r_{x,u_1}\cdot i_{u_1,u_2}+r_{x,u_2}\cdot i_{u_2,y}\end{array}\right\}\ ,\ \forall(u_1,u_2)\in[x,y]}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
1 & \overbrace{\quad\rightarrow\quad}^{r_{x,u_1}} & r_{x,u_1} & \overbrace{\quad\rightarrow\quad}^{r_{u_1,u_2}} & r_{x,u_2} & & \\
\hline
 & & i_{x,u_1} & + & r_{x,u_1}\cdot i_{u_1,u_2} & + & r_{x,u_2}\cdot i_{u_2,y} \\
\hline
x & \underbrace{\qquad\qquad}_{u_1-x} & u_1 & \underbrace{\qquad\qquad}_{u_2-u_1} & u_2 & \underbrace{\qquad\qquad}_{y-u_2} & y
\end{array}$$

$$\boxed{\left.\begin{array}{l}(1-d_{x,y})=(1-d_{x,u_1})\cdot(1-d_{u_1,u_2})\cdot(1-d_{u_2,y})\\ d_{x,y}=v_{u_1,y}\cdot d_{x,u_1}+v_{u_2,y}\cdot d_{u_1,u_2}+d_{u_2,y}\end{array}\right\}\ ,\ \forall(u_1,u_2)\in[x,y]}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & v_{u_1,y} & \overbrace{\quad\leftarrow\quad}^{v_{u_1,u_2}} & v_{u_2,y} & \overbrace{\quad\leftarrow\quad}^{v_{u_2,y}} & 1 \\
\hline
v_{u_1,y}\cdot d_{x,u_1} & + & v_{u_2,y}\cdot d_{u_1,u_2} & + & d_{u_2,y} & & \\
\hline
x & \underbrace{\qquad\qquad}_{u_1-x} & u_1 & \underbrace{\qquad\qquad}_{u_2-u_1} & u_2 & \underbrace{\qquad\qquad}_{y-u_2} & y
\end{array}$$

e in generale, nel caso di n epoche intermedie, indicando anche simbolicamente x con u_0 e y con u_{n+1}, la condizione di scindibilità risulta

$$\left.\begin{aligned}
&(1+i_{x,y}) = (1+i_{x,u_1})\cdot\prod_{k=2}^{n}(1+i_{u_{k-1},u_k})\cdot(1+i_{u_n,y}) = \prod_{k=1}^{n+1}(1+i_{u_{k-1},u_k})\\
&i_{x,y} = i_{x,u_1} + \sum_{k=2}^{n}(r_{x,u_{k-1}}\cdot i_{u_{k-1},u_k}) + r_{x,u_n}\cdot i_{u_n,y} = \sum_{k=1}^{n+1}(r_{u_0,u_{k-1}}\cdot i_{u_{k-1},u_k})
\end{aligned}\right\}$$

$$\forall \prod_{k=1}^{n} u_k \in [\underset{x}{u_0}, \underset{y}{u_{n+1}}]$$

$$\left.\begin{aligned}
&(1-d_{x,y}) = (1-d_{x,u_1})\cdot\prod_{k=2}^{n}(1-d_{u_{k-1},u_k})\cdot(1-d_{u_n,y}) = \prod_{k=1}^{n+1}(1-d_{u_{k-1},u_k})\\
&d_{x,y} = v_{u_1,y}\cdot d_{x,u_1} + \sum_{k=2}^{n}(v_{u_k,y}\cdot d_{u_{k-1},u_k}) + d_{u_n,y} = \sum_{k=1}^{n+1}(v_{u_k,u_{n+1}}\cdot d_{u_{k-1},u_k})
\end{aligned}\right\}$$

$$\forall \prod_{k=1}^{n} u_k \in [\underset{x}{u_0}, \underset{y}{u_{n+1}}]$$

La condizione di scindibilità può essere generalizzata, ipotizzando che le epoche "intermedie" possano localizzarsi anche al di fuori dell'intervallo caratterizzante l'operazione finanziaria.

Con riguardo al caso di una sola epoca "intermedia" precedente al tempo iniziale o successiva al tempo finale, risulta:

- ***epoca "intermedia" precedente all'epoca x***

$$\left.\begin{aligned}
&r_{x,y} = v_{u,x}\cdot r_{u,y} = \frac{r_{u,y}}{r_{u,x}}\\
&i_{x,y} = (1-d_{u,x})\cdot(1+i_{u,y}) - 1 = -\,d_{u,x} + v_{u,x}\cdot i_{u,y}
\end{aligned}\right\}\ ,\ \ \forall u \in (-\infty, x)$$

$$\left.\begin{aligned} v_{x,y} &= v_{u,y} \cdot r_{u,x} = \frac{v_{u,y}}{v_{u,x}} \\ d_{x,y} &= 1-(1-d_{u,y})\cdot(1+i_{u,x}) = -\,v_{u,y}\cdot i_{u,x} + d_{u,y} \end{aligned}\right\} \quad , \ \forall u \in (-\infty, x)$$

- *epoca "intermedia" successiva all'epoca y*

$$\left.\begin{aligned} r_{x,y} &= r_{x,u} \cdot v_{y,u} = \frac{r_{x,u}}{r_{y,u}} \\ i_{x,y} &= (1+i_{x,u})\cdot(1-d_{y,u}) - 1 = i_{x,u} - r_{x,u}\cdot d_{y,u} \cdot \end{aligned}\right\} \quad , \ \forall u \in (y, +\infty)$$

$$\left.\begin{aligned} v_{x,y} &= r_{y,u} \cdot v_{x,u} = \frac{v_{x,u}}{v_{y,u}} \\ d_{x,y} &= 1-(1-d_{x,u})\cdot(1+i_{y,u}) = r_{y,u}\cdot d_{x,u} - i_{y,u} \end{aligned}\right\} \quad , \ \forall u \in (y, +\infty)$$

Nota:
Nel caso in cui le diverse condizioni di scindibilità risultano verificate solo per alcune epoche intermedie (eventualmente precedenti o successive), allora la condizione di scindibilità viene definita "puntuale".

1.6– Uniformità (traslabilità) di leggi finanziarie

Una legge finanziaria si dice uniforme (oppure traslabile) se il valore delle diverse funzioni finanziarie non cambia, nell'ipotesi di traslazione dell'intervallo temporale [x,y] di riferimento della operazione finanziaria, con la conseguenza che il risultato dipende esclusivamente dalla durata t dell'operazione stessa

$$\left.\begin{aligned} r_{x,y} &= r_{x+k,y+k} \\ v_{x,y} &= v_{x+k,y+k} \end{aligned}\right\} \quad , \ \forall k \in R$$

$$\boxed{\left.\begin{aligned} i_{x,y} &= i_{x+k,y+k} \\ d_{x,y} &= d_{x+k,y+k} \end{aligned}\right\} \ , \ \forall k \in R}$$

considerando in particolare k = - x, risulta

$$\boxed{\begin{aligned} r_{x,y} &= r_{x-x,y-x} = r_{0,y-x} = r_{y-x} = r_t \\ v_{x,y} &= v_{x-x,y-x} = v_{0,y-x} = v_{y-x} = v_t \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} i_{x,y} &= i_{x-x,y-x} = i_{0,y-x} = i_{y-x} = i_t \\ d_{x,y} &= d_{x-x,y-x} = d_{0,y-x} = d_{y-x} = d_t \end{aligned}}$$

Lo schema generale delle relazioni esistenti tra funzioni finanziarie di leggi finanziarie uniformi risulta

	$\boxed{r_{y-x} = r_t}$	$\boxed{v_{y-x} = v_t}$	$\boxed{i_{y-x} = i_t}$	$\boxed{d_{y-x} = d_t}$
$\boxed{r_{y-x} = r_t} =$	...	$\frac{1}{v_t}$	$1+i_t$	$\frac{1}{1-d_t}$
$\boxed{v_{y-x} = v_t} =$	$\frac{1}{r_t}$	...	$\frac{1}{1+i_t}$	$1-d_t$
$\boxed{i_{y-x} = i_t} =$	$r_t - 1$	$\frac{1-v_t}{v_t}$	...	$\frac{d_t}{1-d_t}$
$\boxed{d_{y-x} = d_t} =$	$\frac{r_t-1}{r_t}$	$1-v_t$	$\frac{i_t}{1+i_t}$	...

Con le ovvie condizioni e considerazioni

$$\boxed{r_t \cdot v_t = 1} \quad \boxed{i_t - d_t = i_t \cdot d_t} \quad \boxed{i_t = d_t \cdot r_t} \quad \boxed{d_t = i_t \cdot v_t}$$

$$\boxed{r_0 = v_0 = 1} \quad \boxed{i_0 = d_0 = 0}$$

- ***r_t , i_t e d_t crescenti (non decrescenti) rispetto ad t (per la posticipazione della scadenza ossia all'aumentare della durata dell'investimento)***

$$\boxed{\frac{d\,r_t}{dt} > 0 \quad (\geq 0)} \qquad \boxed{\frac{d\,i_t}{dt} > 0 \quad (\geq 0)} \qquad \boxed{\frac{d\,d_t}{dt} > 0 \quad (\geq 0)}$$

- ***v_t decrescente (non crescente) rispetto ad t (per la stessa motivazione)***

$$\boxed{\frac{d\,v_t}{dt} < 0 \quad (\leq 0)}$$

In caso di uniformità di una legge finanziaria, la condizione di scindibilità, con riguardo ad una durata intermedia, risulta

$$\boxed{\begin{array}{ll}
r_{x,y} = r_{x,u} \cdot r_{u,y} & , \ \forall u \in [x,y] \\
r_{x-x,y-x} = r_{x-x,u-x} \cdot r_{u-x,y-x} & , \ \forall \underbrace{(u-x)}_{s} \in [\underbrace{x-x}_{0}, \underbrace{y-x}_{t}] \\
r_{0,t} = r_{0,s} \cdot r_{s,t} = r_{0,s} \cdot r_{0,t-s} & , \ \forall s \in [0,t] \\
r_t = r_s \cdot r_{t-s} & , \ \forall s \in [0,t]
\end{array}}$$

$$\begin{array}{ccccc}
 & \overbrace{\qquad\qquad}^{r_s} & & \overbrace{\qquad\qquad}^{r_{t-s}} & \\
1 & \rightarrow & r_s & \rightarrow & r_t \\ \hline
0 & & s & & t \\
 & \underbrace{\qquad\qquad}_{s} & & \underbrace{\qquad\qquad}_{t-s} &
\end{array}$$

ossia il montante finale non cambia se, con riferimento ad una durata intermedia, l'operazione finanziaria di capitalizzazione viene interrotta e immediatamente ripresa.

❖ ***Esempio (da § 1.5): Al tempo iniziale 0 un soggetto A presta ad un soggetto B un importo P_0 con impegno di restituzione, dopo un intervallo di tempo di ampiezza t (> 0), di un importo M_t (> P_0)***

$$\boxed{M_t = P_0 \cdot r_t}$$

dopo un intervallo di tempo parziale di ampiezza s ($0 < s < t$) i due soggetti concordano di anticipare la scadenza del contratto e di effettuare la valutazione dell'importo M_s, che il soggetto B deve restituire al soggetto A, nei due diversi modi:

- ***retrospettivamente (da parte del soggetto B (debitore)), il quale considera che l'operazione finanziaria, iniziata al tempo 0, si è conclusa dopo un intervallo di tempo di ampiezza s e quindi il suo debito è rappresentato dal montante al tempo s dell'importo prestato***

$$\boxed{M_s^{(r)} = P_0 \cdot r_s}$$

- ***prospettivamente (da parte del soggetto A (creditore)), il quale considera che l'operazione finanziaria, iniziata al tempo 0, doveva essere conclusa dopo un intervallo di tempo di ampiezza t e quindi il suo credito è rappresentato dal valore attuale al tempo s dell'importo da restituire***

$$\boxed{M_s^{(p)} = M_t \cdot v_{t-s} = P_0 \cdot r_t \cdot v_{t-s} = P_0 \cdot \frac{r_t}{r_{t-s}}}$$

i due importi coincidono se

$$\boxed{M_s^{(r)} = M_s^{(p)} \;\Rightarrow\; P_0 \cdot r_s = P_0 \cdot \frac{r_t}{r_{t-s}} \;\Rightarrow\; r_s \cdot r_{t-s} = r_t}$$

che rappresenta, appunto, la condizione di scindibilità di una legge finanziaria uniforme.

Ricordando la relazione esistente tra il fattore di capitalizzazione e quello di attualizzazione, risulta

$$\boxed{\frac{1}{v_t}=\frac{1}{v_s}\cdot\frac{1}{v_{t-s}}\Rightarrow v_t=v_s\cdot v_{t-s}\quad ,\ \forall s\in[0,t]}$$

$$\begin{array}{ccccc} v_t & \overbrace{\quad\leftarrow\quad}^{v_s} & v_{t-s} & \overbrace{\quad\leftarrow\quad}^{v_{t-s}} & 1 \\ \hline 0 & \underbrace{\qquad\qquad}_{s} & s & \underbrace{\qquad\qquad}_{t-s} & t \end{array}$$

ossia il valore attuale iniziale non cambia se, con riferimento ad una durata intermedia, l'operazione finanziaria di attualizzazione viene interrotta e immediatamente ripresa.

Nel caso di due durate intermedie, si ha

$$\boxed{\begin{array}{l} r_t=r_{s_1}\cdot r_{s_2-s_1}\cdot r_{t-s_2} \\ \quad\forall(s_1,s_2)\in[0,t] \end{array}}$$

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \overbrace{\quad\rightarrow\quad}^{r_{s_1}} & r_{s_1} & \overbrace{\quad\rightarrow\quad}^{r_{s_2-s_1}} & r_{s_2} & \overbrace{\quad\rightarrow\quad}^{r_{t-s_2}} & r_t \\ \hline 0 & \underbrace{\qquad\qquad}_{s_1} & s_1 & \underbrace{\qquad\qquad}_{s_2-s_1} & s_2 & \underbrace{\qquad\qquad}_{t-s_2} & t \end{array}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} v_t=v_{s_1}\cdot v_{s_2-s_1}\cdot v_{t-s_2} \\ \quad\forall(s_1,s_2)\in[0,t] \end{array}}$$

$$\begin{array}{ccccccc} v_t & \overbrace{\quad\leftarrow\quad}^{v_{s_1}} & v_{t-s_1} & \overbrace{\quad\leftarrow\quad}^{v_{s_2-s_1}} & v_{t-s_2} & \overbrace{\quad\leftarrow\quad}^{v_{t-s_2}} & 1 \\ \hline 0 & \underbrace{\qquad\qquad}_{s_1} & s_1 & \underbrace{\qquad\qquad}_{s_2-s_1} & s_2 & \underbrace{\qquad\qquad}_{t-s_2} & t \end{array}$$

e in generale, nel caso di n durate intermedie, si ha

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} r_t=r_{s_1}\cdot\displaystyle\prod_{k=2}^{n} r_{s_k-s_{k-1}}\cdot r_{t-s_n} \\ v_t=v_{s_1}\cdot\displaystyle\prod_{k=2}^{n} v_{s_k-s_{k-1}}\cdot v_{t-s_n} \end{array}\right\}\ ,\ \forall\prod_{k=1}^{n} s_k\in[0,t]}$$

ovvero, indicando simbolicamente 0 con s_0 e t con s_{n+1},

$$\boxed{\left.\begin{aligned} r_t &= \prod_{k=1}^{n+1} r_{s_k - s_{k-1}} \\ v_t &= \prod_{k=1}^{n+1} v_{s_k - s_{k-1}} \end{aligned}\right\} \ , \ \forall \bigcup_{k=1}^{n} s_k \in [0,t]}$$

Considerando le definizioni introdotte d'interesse (e di sconto) unitario, le condizioni di scindibilità per leggi finanziarie uniformi possono essere scritte nel modo seguente

$$\boxed{i_t = i_s + r_s \cdot i_{t-s} \ \ , \ \forall s \in [0,t]}$$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \overbrace{\quad\rightarrow\quad}^{r_s} & r_s & & \\ \hline & & i_s & + & r_s \cdot i_{t-s} \\ \hline 0 & \underbrace{\qquad\qquad}_{s} & s & \underbrace{\qquad\qquad}_{t-s} & t \end{array}$$

$$\boxed{d_t = v_{t-s} \cdot d_s + d_{t-s} \ \ , \ \forall s \in [0,t]}$$

$$\begin{array}{ccccc} & & v_{t-s} & \overbrace{\quad\leftarrow\quad}^{v_{t-s}} & 1 \\ \hline v_{t-s} \cdot d_s & + & d_{t-s} & & \\ \hline 0 & \underbrace{\qquad\qquad}_{s} & s & \underbrace{\qquad\qquad}_{t-s} & t \end{array}$$

Nel caso di due durate intermedie, la condizione di scindibilità risulta

$$\boxed{i_t = i_{s_1} + r_{s_1} \cdot i_{s_2 - s_1} + r_{s_2} \cdot i_{t-s_2} \ \ , \ \forall (s_1, s_2) \in [0,t]}$$

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \overbrace{\quad\rightarrow\quad}^{r_{s_1}} & r_{s_1} & \overbrace{\quad\rightarrow\quad}^{r_{s_2-s_1}} & r_{s_2} & & \\ \hline & & i_{s_1} & + & r_{s_1} \cdot i_{s_2-s_1} & + & r_{s_2} \cdot i_{t-s_2} \\ \hline 0 & \underbrace{\qquad\qquad}_{s_1} & s_1 & \underbrace{\qquad\qquad}_{s_2-s_1} & s_2 & \underbrace{\qquad\qquad}_{t-s_2} & t \end{array}$$

$$\boxed{d_t = v_{t-s_1}\cdot d_{s_1} + v_{t-s_2}\cdot d_{s_2-s_1} + d_{t-s_2} \quad , \ \forall (s_1, s_2) \in [0,t]}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & v_{t-s_1} & \overbrace{\quad\leftarrow\quad}^{v_{s_2-s_1}} & v_{t-s_2} & \overbrace{\quad\leftarrow\quad}^{v_{t-s_2}} & 1 \\
\hline
\multicolumn{7}{l}{v_{t-s_1}\cdot d_{s_1} \ + \ v_{t-s_2}\cdot d_{s_2-s_1} \ + \ d_{t-s_2}} \\
\hline
0 & \underbrace{\qquad\qquad}_{s_1} & s_1 & \underbrace{\qquad\qquad}_{s_2-s_1} & s_2 & \underbrace{\qquad\qquad}_{t-s_2} & t
\end{array}$$

e in generale, nel caso di n durate intermedie, indicando anche simbolicamente 0 con s_0 e t con s_{n+1}, la condizione di scindibilità risulta

$$\boxed{i_t = i_{s_1} + \sum_{k=2}^{n}(r_{s_{k-1}}\cdot i_{s_k - s_{k-1}}) + r_{s_n}\cdot i_{t-s_n} = \sum_{k=1}^{n+1}(r_{s_{k-1}}\cdot i_{s_k - s_{k-1}}) \ , \ \forall \prod_{k=1}^{n} s_k \in [0,t]}$$

$$\boxed{d_t = v_{t-s_1}\cdot d_{s_1} + \sum_{k=2}^{n}(v_{t-s_k}\cdot d_{s_k - s_{k-1}}) + d_{t-s_n} = \sum_{k=1}^{n+1}(v_{t-s_k}\cdot d_{s_k - s_{k-1}}) \ , \ \forall \prod_{k=1}^{n} s_k \in [0,t]}$$

La condizione di scindibilità può essere generalizzata, ipotizzando che le durate "intermedie" possano localizzarsi anche al di fuori dell'intervallo caratterizzante l'operazione finanziaria:

- ***durata "intermedia" precedente all'epoca 0***

$$\boxed{\left.\begin{array}{r} r_t = v_{-s}\cdot r_{t-s} = \dfrac{r_{t-s}}{r_{-s}} \\ i_t = (1-d_{-s})\cdot(1+i_{t-s}) - 1 = -d_{-s} + v_{-s}\cdot i_{t-s} \end{array}\right\} \ , \ \forall s \in (-\infty, 0)}$$

$$\boxed{\left.\begin{array}{r} v_t = v_{t-s}\cdot r_{-s} = \dfrac{v_{t-s}}{v_{-s}} \\ d_t = 1-(1-d_{t-s})\cdot(1+i_{-s}) = -v_{t-s}\cdot i_{-s} + d_{t-s} \end{array}\right\} \ , \ \forall s \in (-\infty, 0)}$$

- *durata "intermedia" successiva alla durata t*

$$\left.\begin{array}{l} r_t = r_s \cdot v_{s-t} = \dfrac{r_s}{r_{s-t}} \\ i_t = (1+i_s)\cdot(1-d_{s-t}) - 1 = i_s - r_s \cdot d_{s-t} \end{array}\right\} \quad , \quad \forall s \in (t,+\infty)$$

$$\left.\begin{array}{l} v_t = r_{s-t} \cdot v_s = \dfrac{v_s}{v_{s-t}} \\ d_t = 1-(1-d_s)\cdot(1+i_{s-t}) = r_{s-t}\cdot d_s - i_{s-t} \end{array}\right\} \quad , \quad \forall s \in (t,+\infty)$$

Nel caso in cui le diverse condizioni di scindibilità risultano verificate solo per alcune durate intermedie (eventualmente precedenti o successive), allora la condizione di scindibilità viene definita "puntuale".

1.7– Forza d'interesse (e di sconto)

Considerata la funzione del fattore di capitalizzazione $r_{x,y}$ di una legge finanziaria, se essa è derivabile parzialmente (con derivata continua) rispetto alla variabile y, si definisce forza d'interesse la sua derivata parziale logaritmica rispetto ad y, ossia il rapporto tra la derivata parziale della funzione rispetto ad y e la funzione stessa (a causa della positività e della crescenza della funzione $r_{x,y}$, rispetto alla variabile y, segue la positività della funzione forza d'interesse, così come definita).

Nota: L'indicazione [x] nel simbolo della forza di interesse (e di sconto) evidenzia l'epoca iniziale dell'operazione finanziaria

$$\delta_y^{[x]} = \frac{\partial \lg r_{x,y}}{\partial y} = \frac{\dfrac{\partial r_{x,y}}{\partial y}}{r_{x,y}} = \frac{\dfrac{\partial (1+i_{x,y})}{\partial y}}{1+i_{x,y}}$$

in modo analogo, considerata la funzione del corrispondente fattore di attualizzazione $v_{x,y}$, se essa è derivabile parzialmente (con derivata continua) rispetto alla variabile y, si definisce forza di sconto l'opposto della sua derivata parziale logaritmica rispetto ad y, ossia l'opposto del rapporto tra la derivata parziale della funzione rispetto ad y e la funzione stessa (a causa della positività e della decrescenza della funzione $v_{x,y}$, rispetto ad y, segue la positività della funzione forza di sconto, così come definita)

$$\boxed{\rho_y^{[x]} = -\frac{\partial \lg v_{x,y}}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial v_{x,y}}{\partial y}}{v_{x,y}} = -\frac{\frac{\partial (1-d_{x,y})}{\partial y}}{1-d_{x,y}}}$$

E' facile mostrare la coincidenza delle due forze, infatti

$$\rho_y^{[x]} = -\frac{\frac{\partial v_{x,y}}{\partial y}}{v_{x,y}} = -\frac{\frac{\partial \frac{1}{r_{x,y}}}{\partial y}}{\frac{1}{r_{x,y}}} = -r_{x,y} \cdot \left(-\frac{\frac{\partial r_{x,y}}{\partial y}}{(r_{x,y})^2} \right) = \frac{\frac{\partial r_{x,y}}{\partial y}}{r_{x,y}} = \delta_y^{[x]}$$

per la qual cosa useremo, nel seguito, la forza d'interesse, anche in ipotesi di considerazione della forza di sconto.

La relazione di definizione della forza d'interesse si presenta nella forma di una equazione differenziale (a variabili separabili) nella funzione incognita $r_{x,y}$, che può quindi essere facilmente integrata con riferimento all'intervallo temporale [x,y]

$$\int_x^y \delta_w^{[x]} dw = \int_x^y \frac{\partial \lg r_{x,w}}{\partial w} dw = \left[\lg r_{x,w} \right]_x^y = \lg r_{x,y} - \lg r_{x,x} = \lg r_{x,y}$$

$$r_{x,y} = e^{\int_x^y \delta_w^{[x]} dw}$$ $$v_{x,y} = e^{-\int_x^y \delta_w^{[x]} dw}$$ $$i_{x,y} = e^{\int_x^y \delta_w^{[x]} dw} - 1$$ $$d_{x,y} = 1 - e^{-\int_x^y \delta_w^{[x]} dw}$$

Dalla definizione della funzione finanziaria forza di interesse è possibile dedurre l'ulteriore funzione rendimento a scadenza, corrispondente finanziariamente alla media aritmetica della forza d'interesse nell'intervallo [x,y]

$$h_y^{[x]} = \frac{\int_x^y \delta_w^{[x]} dw}{y-x}$$ ***ossia*** $$\int_x^y \delta_w^{[x]} dw = h_y^{[x]}(y-x)$$

da cui, derivando rispetto ad y

$$\delta_y^{[x]} = \frac{\partial(h_y^{[x]}(y-x))}{\partial y} = h_y^{[x]} + \frac{\partial h_y^{[x]}}{\partial y}(y-x)$$

risulta evidente la relazione esistente tra l'andamento della curva dei rendimenti a scadenza e il confronto tra la forza di interesse e il rendimento a scadenza

$$\frac{\partial h_y^{[x]}}{\partial y} \begin{cases} < 0 & \Leftrightarrow \quad \delta_y^{[x]} < h_y^{[x]} \\ = 0 & \Leftrightarrow \quad \delta_y^{[x]} = h_y^{[x]} \\ > 0 & \Leftrightarrow \quad \delta_y^{[x]} > h_y^{[x]} \end{cases}$$

risultando

$$r_{x,y} = e^{h_y^{[x]}(y-x)}$$ $$v_{x,y} = e^{-h_y^{[x]}(y-x)}$$

$$i_{x,y} = e^{h_y^{[x]}(y-x)} - 1$$ $$d_{x,y} = 1 - e^{-h_y^{[x]}(y-x)}$$

Risulta inoltre (applicando la regola di De L'Hopital)

il marchese de l'Hôpital

***Guillaume François Antoine de Sainte Mesme**, marchese **de l'Hôpital**, o **de l'Hospital** (Parigi 1661 – Parigi 1704), è stato un matematico francese, studioso del calcolo infinitesimale. Egli è conosciuto principalmente per la formula, che porta il suo nome, che permette di calcolare, sotto determinate condizioni analitiche, il limite di forme indeterminate. De l'Hôpital intraprese inizialmente la carriera militare ma, soffrendo di deficienza visiva, optò per gli studi matematici. Nel 1696 pubblicò il primo manuale di calcolo differenziale che sia mai stato stampato: "Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes", in cui venne pubblicata per la prima volta la nota regola. La scoperta però è probabilmente dovuta a Johann Bernoulli, sulle cui lezioni si basava in buona parte il libro di l'Hôpital. Molte fonti riportano addirittura che de l'Hôpital sarebbe stato allievo di Bernoulli. Nel 1694 i due matematici stilarono un accordo in base al quale de l'Hôpital avrebbe pagato annualmente a Bernoulli un compenso di 300 franchi per risolvere problemi matematici. Tale accordo stabiliva però che Bernoulli non rivendicasse alcun diritto su tali risoluzioni e, ovviamente, che il patto rimanesse segreto. Nel 1704 dopo la morte di de l'Hôpital, Bernoulli rivelò il patto al mondo intero. Nel 1922 furono trovati documenti che avallavano la sua confessione.*

$$\boxed{h_x^{[x]} = \lim_{y\to x} h_y^{[x]} = \lim_{y\to x} \frac{\int_x^y \delta_w^{[x]}\, dw}{y-x}} \qquad \boxed{\lim_{y\to x} \frac{\dfrac{\partial \int_x^y \delta_w^{[x]}\, dw}{\partial y}}{\dfrac{\partial (y-x)}{\partial y}} = \lim_{y\to x} \frac{\delta_y^{[x]}}{1} = \delta_x^{[x]}}$$

con le quali è possibile integrare lo schema generale della relazioni esistenti tra le diverse funzioni finanziarie

	$\boxed{r_{x,y}}$	$\boxed{v_{x,y}}$	$\boxed{i_{x,y}}$	$\boxed{d_{x,y}}$	$\boxed{\delta_y^{[x]}}$	$\boxed{h_y^{[x]}}$
$\boxed{r_{x,y}} =$	...	$\frac{1}{v_{x,y}}$	$1+i_{x,y}$	$\frac{1}{1-d_{x,y}}$	$e^{\int_x^y \delta_w^{[x]} dw}$	$e^{h_y^{[x]}(y-x)}$
$\boxed{v_{x,y}} =$	$\frac{1}{r_{x,y}}$	...	$\frac{1}{1+i_{x,y}}$	$1-d_{x,y}$	$e^{-\int_x^y \delta_w^{[x]} dw}$	$e^{-h_y^{[x]}(y-x)}$
$\boxed{i_{x,y}} =$	$r_{x,y}-1$	$\frac{1-v_{x,y}}{v_{x,y}}$	...	$\frac{d_{x,y}}{1-d_{x,y}}$	$e^{\int_x^y \delta_w^{[x]} dw}-1$	$e^{h_y^{[x]}(y-x)}-1$
$\boxed{d_{x,y}} =$	$\frac{r_{x,y}-1}{r_{x,y}}$	$1-v_{x,y}$	$\frac{i_{x,y}}{1+i_{x,y}}$	...	$1-e^{-\int_x^y \delta_w^{[x]} dw}$	$1-e^{-h_y^{[x]}(y-x)}$
$\boxed{\delta_y^{[x]}} =$	$\frac{\partial \lg r_{x,y}}{\partial y}$	$-\frac{\partial \lg v_{x,y}}{\partial y}$	$\frac{\partial \lg(1+i_{x,y})}{\partial y}$	$-\frac{\partial \lg(1-d_{x,y})}{\partial y}$	...	$\frac{\partial (h_y^{[x]}(y-x))}{\partial y}$
$\boxed{h_y^{[x]}} =$	$\frac{\lg r_{x,y}}{y-x}$	$-\frac{\lg v_{x,y}}{y-x}$	$\frac{\lg(1+i_{x,y})}{y-x}$	$-\frac{\lg(1-d_{x,y})}{y-x}$	$\frac{\int_x^y \delta_w^{[x]} dw}{y-x}$	...

Con riguardo al caso esaminato di un'epoca intermedia, la condizione di scindibilità di una legge finanziaria può essere espressa attraverso la forza d'interesse

$$\boxed{r_{x,y} = r_{x,u} \cdot r_{u,y} \Rightarrow e^{\int_x^y \delta_w^{[x]} dw} = e^{\int_x^u \delta_w^{[x]} dw} \cdot e^{\int_u^y \delta_w^{[u]} dw} = e^{\int_x^u \delta_w^{[x]} dw + \int_u^y \delta_w^{[u]} dw} \quad , \ \forall u \in [x,y]}$$

$$\int_x^y \delta_w^{[x]} dw = \int_x^u \delta_w^{[x]} dw + \int_u^y \delta_w^{[u]} dw \ \Rightarrow \ \int_u^y \delta_w^{[x]} dw = \int_u^y \delta_w^{[u]} dw$$

da cui, derivando rispetto ad y

$$\boxed{\frac{\partial \int_u^y \delta_w^{[x]} dw}{\partial y} = \frac{\partial \int_u^y \delta_w^{[u]} dw}{\partial y} \ , \ \delta_y^{[x]} = \delta_y^{[u]} \ , \ \forall u \in [x,y]}$$

le considerazioni possono essere estese ad epoche "intermedie" precedenti

$$\boxed{r_{x,y} = \frac{r_{u,y}}{r_{u,x}} \Rightarrow e^{\int_x^y \delta_w^{[x]} dw} = \frac{e^{\int_u^y \delta_w^{[u]} dw}}{e^{\int_u^x \delta_w^{[u]} dw}} = e^{\int_u^y \delta_w^{[u]} dw - \int_u^x \delta_w^{[u]} dw} = e^{\int_x^y \delta_w^{[u]} dw} \quad , \ \forall u \in (-\infty, x)}$$

$$\int_x^y \delta_w^{[x]} dw = \int_x^y \delta_w^{[u]} dw$$

da cui, derivando rispetto ad y

$$\boxed{\frac{\partial \int_x^y \delta_w^{[x]} dw}{\partial y} = \frac{\partial \int_x^y \delta_w^{[u]} dw}{\partial y} \ , \ \delta_y^{[x]} = \delta_y^{[u]} \ , \ \forall u \in (-\infty, x)}$$

o "intermedie" successive

$$\boxed{r_{x,y}=\frac{r_{x,u}}{r_{y,u}}\Rightarrow e^{\int_x^y \delta_w^{[x]}dw}=\frac{e^{\int_x^u \delta_w^{[x]}dw}}{e^{\int_y^u \delta_w^{[y]}dw}}=e^{\int_x^u \delta_w^{[x]}dw-\int_y^u \delta_w^{[y]}dw}\quad,\ \forall u\in(y,+\infty)}$$

$$\int_x^y \delta_w^{[x]}dw=\int_x^u \delta_w^{[x]}dw-\int_y^u \delta_w^{[y]}dw\ \Rightarrow\ \int_y^u \delta_w^{[x]}dw=\int_y^u \delta_w^{[y]}dw$$

da cui, derivando rispetto ad u

$$\boxed{\frac{\partial\int_y^u \delta_w^{[x]}dw}{\partial u}=\frac{\partial\int_y^u \delta_w^{[y]}dw}{\partial u}\quad,\ \delta_u^{[x]}=\delta_u^{[y]}\quad,\ \forall u\in(y,+\infty)}$$

dalle considerazioni precedenti deriva che una legge finanziaria risulta scindibile se la forza d'interesse $\delta_y^{[\#]}$ non dipende dalla epoca iniziale dell'investimento (da Cantelli).

Francesco Paolo Cantelli

***Francesco Paolo Cantelli** (Palermo 1875 – Roma 1966), è stato matematico e statistico e ha contribuito in maniera originale alla*

teoria delle probabilità e alla matematica finanziaria e attuariale. Laureato in matematica presso l'Università di Palermo si è originariamente interessato di astronomia, lavorando fino al 1903 presso l'osservatorio astronomico palermitano. Successivamente, fino al 1923, ha lavorato come attuario presso l'Istituto di Previdenza della Cassa Depositi e Prestiti, svolgendo attività e ricerche in matematica finanziaria e attuariale e teoria delle probabilità, con particolare riguardo alla teoria astratta del calcolo delle probabilità (in anticipo rispetto alla impostazione assiomatica di Kolmogorov), alla convergenza stocastica e alla teoria dei grandi numeri di Borel, alle tavole di mutualità ed alla teoria dei capitali accumulati. E' stato professore di matematica finanziaria ed attuariale presso le Università di Catania, Napoli e Roma. Nel 1930 ha fondato il Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari conducendolo fino al 1958. Nell'ambito dei suoi interessi in astronomia, ha mostrato che, con le informazioni astronomiche presenti nella Divina Commedia, il viaggio immaginario di Dante è da localizzare temporalmente nell'anno 1301.

La condizione di scindibilità di una legge finanziaria può essere espressa anche attraverso il rendimento a scadenza:

- nel caso di un'epoca intermedia

$$\boxed{r_{x,y} = r_{x,u} \cdot r_{u,y} \Rightarrow e^{h_y^{[x]}(y-x)} = e^{h_u^{[x]}(u-x)} \cdot e^{h_y^{[u]}(y-u)} \quad , \ \forall u \in [x,y]}$$

$$h_y^{[x]}(y-x) = h_u^{[x]}(u-x) + h_y^{[u]}(y-u)$$

$$\boxed{h_y^{[x]} = \frac{h_u^{[x]}(u-x) + h_y^{[u]}(y-u)}{y-x}}$$

- nel caso di un'epoca "intermedia" precedente

$$\boxed{r_{x,y} = \frac{r_{u,y}}{r_{u,x}} \Rightarrow e^{h_y^{[x]}(y-x)} = \frac{e^{h_y^{[u]}(y-u)}}{e^{h_x^{[u]}(x-u)}} = e^{h_y^{[u]}(y-u) - h_x^{[u]}(x-u)} \quad , \ \forall u \in (-\infty, x)}$$

$$h_y^{[u]}(y-u)=h_x^{[u]}(x-u)+h_y^{[x]}(y-x)$$

$$\boxed{h_y^{[u]}=\frac{h_x^{[u]}(x-u)+h_y^{[x]}(y-x)}{y-u}}$$

- nel caso di un'epoca "intermedia" successiva

$$\boxed{r_{x,y}=\frac{r_{x,u}}{r_{y,u}}\Rightarrow e^{h_y^{[x]}(y-x)}=\frac{e^{h_u^{[x]}(u-x)}}{e^{h_u^{[y]}(u-y)}}=e^{h_u^{[x]}(u-x)-h_u^{[y]}(u-y)}\quad,\quad\forall u\in(y,+\infty)}$$

$$h_u^{[x]}(u-x)=h_y^{[x]}(y-x)+h_u^{[y]}(u-y)$$

$$\boxed{h_u^{[x]}=\frac{h_y^{[x]}(y-x)+h_u^{[y]}(u-y)}{u-x}}$$

Nel caso di leggi finanziarie uniformi derivabili (con derivate continue), la forza d'interesse dipende dalla sola variabile t e si definisce come la sua derivata logaritmica, ossia come rapporto tra la derivata della funzione rispetto ad t e la funzione stessa (a causa della positività e della crescenza della funzione r_t, segue la positività della funzione forza d'interesse, così come definita) e in modo analogo, si può definire la forza di sconto, dipendente dalla sola variabile t, come l'opposto della sua derivata logaritmica, ossia come l'opposto del rapporto tra la derivata della funzione rispetto ad t e la funzione stessa (a causa della positività e della decrescenza della funzione v_t, segue la positività della funzione forza di sconto, così come definita)

$$\boxed{\delta_t=\frac{d\,lg\,r_t}{dt}=\frac{\frac{dr_t}{dt}}{r_t}=\frac{\frac{d(1+i_t)}{dt}}{1+i_t}}$$

$$\boxed{\rho_t = -\frac{d\,lg v_t}{dt} = -\frac{\frac{dv_t}{dt}}{v_t} = -\frac{\frac{d(1-d_t)}{dt}}{1-d_t}}$$

Anche in questo caso è facile mostrare la coincidenza delle due forze, infatti

$$\rho_t = -\frac{\frac{dv_t}{\partial t}}{v_t} = -\frac{\frac{d\frac{1}{r_t}}{dt}}{\frac{1}{r_t}} = -r_t \cdot \left(-\frac{\frac{dr_t}{dt}}{(r_t)^2} \right) = \frac{\frac{dr_t}{dt}}{r_t} = \delta_t$$

per cui, come già detto, useremo, nel seguito, la forza d'interesse, anche in ipotesi di considerazione della forza di sconto.

La relazione di definizione della forza d'interesse si presenta nella forma di una equazione differenziale (a variabili separabili) nella funzione incognita r_t, che può quindi essere facilmente integrata con riferimento all'intervallo temporale [0,t]

$$\int_0^t \delta_w \, dw = \int_0^t \frac{d\,lg\,r_w}{dw} dw = \left[lg\,r_w \right]_0^t = lg\,r_t - lg\,r_0 = lg\,r_t$$

$$\boxed{r_t = e^{\int_0^t \delta_w\,dw}} \quad \boxed{v_t = e^{-\int_0^t \delta_w\,dw}} \quad \boxed{i_t = e^{\int_0^t \delta_w\,dw} - 1} \quad \boxed{d_t = 1 - e^{-\int_0^t \delta_w\,dw}}$$

Dalla definizione della funzione finanziaria forza di interesse è possibile dedurre l'ulteriore funzione rendimento a scadenza, corrispondente finanziariamente alla media aritmetica della forza d'interesse nell'intervallo [0,t]

$$\boxed{h_t = \frac{\int_0^t \delta_w \, dw}{t}} \quad \textit{ossia} \quad \boxed{\int_0^t \delta_w \, dw = h_t \, t}$$

da cui, derivando rispetto ad t

$$\boxed{\delta_t = \frac{d\,(h_t\,t)}{dt} = h_t + \frac{d\,h_t}{dt}\,t}$$

risulta evidente la relazione esistente tra l'andamento della curva dei rendimenti a scadenza e il confronto tra la forza di interesse e il rendimento a scadenza

$$\boxed{\frac{dh_t}{dt}\begin{cases} <0 & \Leftrightarrow \quad \delta_t < h_t \\ =0 & \Leftrightarrow \quad \delta_t = h_t \\ >0 & \Leftrightarrow \quad \delta_t > h_t \end{cases}}$$

risultando

$$\boxed{r_t = e^{h_t\,t}} \quad \boxed{v_t = e^{-h_t\,t}} \quad \boxed{i_t = e^{h_t\,t} - 1} \quad \boxed{d_t = 1 - e^{-h_t\,t}}$$

Risulta inoltre (applicando la regola di De L'Hopital)

$$\boxed{h_0 = \lim_{t \to 0} h_t = \lim_{t \to 0} \frac{\int_0^t \delta_w \, dw}{t}} \quad \boxed{\lim_{t \to 0} \frac{\dfrac{d \int_0^t \delta_w \, dw}{dt}}{\dfrac{d\,t}{dt}} = \lim_{t \to 0} \frac{\delta_t}{1} = \delta_0}$$

con le quali è possibile integrare lo schema generale della relazioni esistenti tra le diverse funzioni finanziarie

	$\boxed{r_t}$	$\boxed{v_t}$	$\boxed{i_t}$	$\boxed{d_t}$	$\boxed{\delta_t}$	$\boxed{h_t}$
$\boxed{r_t}=$	...	$\frac{1}{v_t}$	$1+i_t$	$\frac{1}{1-d_t}$	$e^{\int_0^t \delta_w\,dw}$	$e^{h_t t}$
$\boxed{v_t}=$	$\frac{1}{r_t}$	...	$\frac{1}{1+i_t}$	$1-d_t$	$e^{-\int_0^t \delta_w\,dw}$	$e^{-h_t t}$
$\boxed{i_t}=$	r_t-1	$\frac{1-v_t}{v_t}$	...	$\frac{d_t}{1-d_t}$	$e^{\int_0^t \delta_w\,dw}-1$	$e^{h_t t}-1$
$\boxed{d_t}=$	$\frac{r_t-1}{r_t}$	$1-v_t$	$\frac{i_t}{1+i_t}$	...	$1-e^{-\int_0^t \delta_w\,dw}$	$1-e^{-h_t t}$
$\boxed{\delta_t}=$	$\frac{d\,lg\,r_t}{dt}$	$-\frac{d\,lg\,v_t}{dt}$	$\frac{d\,lg(1+i_t)}{dt}$	$-\frac{d\,lg(1-d_t)}{dt}$	...	$\frac{d(h_t t)}{dt}$
$\boxed{h_t}=$	$\frac{lg\,r_t}{t}$	$-\frac{lg\,v_t}{t}$	$\frac{lg(1+i_t)}{t}$	$-\frac{lg(1-d_t)}{t}$	$\frac{\int_0^t \delta_w\,dw}{t}$	...

Anche in questo caso e con le stesse considerazioni, la condizione di scindibilità di una legge finanziaria uniforme può essere espressa attraverso la forza d'interesse

$$\boxed{r_t = r_s \cdot r_{t-s} \ , \ e^{\int_0^t \delta_w\,dw} = e^{\int_0^s \delta_w\,dw} \cdot e^{\int_0^{t-s} \delta_w\,dw} = e^{\int_0^s \delta_w\,dw + \int_0^{t-s} \delta_w\,dw} \ , \ \forall s \in [0,t]}$$

$$\int_0^t \delta_w\,dw = \int_0^s \delta_w\,dw + \int_0^{t-s} \delta_w\,dw \ \Rightarrow \ \int_s^t \delta_w\,dw = \int_0^{t-s} \delta_w\,dw$$

da cui, derivando rispetto a t

$$\boxed{\frac{d\int_s^t \delta_w\,dw}{dt} = \frac{d\int_0^{t-s} \delta_w\,dw}{dt} \ , \ \delta_t = \delta_{t-s} \ , \ \forall s \in [0,t]}$$

le considerazioni possono essere estese a durate "intermedie" precedenti

$$\boxed{r_t = \frac{r_{t-s}}{r_{-s}} \Rightarrow e^{\int_0^t \delta_w\,dw} = \frac{e^{\int_0^{t-s} \delta_w\,dw}}{e^{\int_0^{-s} \delta_w\,dw}} = e^{\int_0^{t-s} \delta_w\,dw - \int_0^{-s} \delta_w\,dw} = e^{\int_{-s}^{t-s} \delta_w\,dw} \quad , \quad \forall s \in (-\infty, 0)}$$

$$\int_0^t \delta_w\,dw = \int_{-s}^{t-s} \delta_w\,dw$$

da cui, derivando rispetto ad t

$$\boxed{\frac{d\int_0^t \delta_w\,dw}{dt} = \frac{d\int_{-s}^{t-s} \delta_w\,dw}{dt} \quad , \quad \delta_t = \delta_{t-s} \quad , \quad \forall s \in (-\infty, 0)}$$

o "intermedie" successive

$$\boxed{r_t = \frac{r_s}{r_{s-t}} \quad , \quad e^{\int_0^t \delta_w\,dw} = \frac{e^{\int_0^{s} \delta_w\,dw}}{e^{\int_0^{s-t} \delta_w\,dw}} = e^{\int_0^{s} \delta_w\,dw - \int_0^{s-t} \delta_w\,dw} = e^{\int_{s-t}^{s} \delta_w\,dw} \quad , \quad \forall s \in (t, +\infty)}$$

$$\int_0^t \delta_w\,dw = \int_{s-t}^{s} \delta_w\,dw$$

da cui, derivando rispetto ad t

$$\boxed{\frac{d\int_0^t \delta_w\,dw}{dt} = \frac{d\int_{s-t}^{s} \delta_w\,dw}{dt} \quad , \quad \delta_t = -\delta_{s-t} \cdot (-1) = \delta_{s-t} \quad , \quad \forall s \in (t, +\infty)}$$

Dalle considerazioni precedenti deriva che una legge finanziaria uniforme risulta scindibile se la forza d'interesse δ risulta costante al variare del tempo (da Cantelli) e coincidente con il rendimento a scadenza h

$$\boxed{h_t = \frac{\int_0^t \delta\, dw}{t} = \frac{\delta \int_0^t dw}{t} = \delta \ldots = h}$$

Con riferimento quindi al caso di una legge finanziaria uniforme e scindibile (con forza d'interesse e rendimento a scadenza costante), le diverse funzioni finanziarie possono scriversi

$$\boxed{r_t = e^{\int_0^t \delta\, dw} = e^{\delta \int_0^t dw} = e^{\delta t}}$$

$$\boxed{v_t = e^{-\delta t}} \qquad \boxed{i_t = e^{\delta t} - 1} \qquad \boxed{d_t = 1 - e^{-\delta t}}$$

e considerando le grandezze finanziarie uniperiodali (o effettive)

$$\boxed{r = r_1 = 1 + i_1 = 1 + i = e^{\delta}} \qquad \boxed{v = v_1 = 1 - d_1 = 1 - d = e^{-\delta}}$$

segue immediatamente

$$\boxed{\delta = \begin{cases} lg\, r = lg(1+i) \\ -\, lg\, v = -\, lg(1-d) \end{cases}}$$

seguono immediatamente le definizioni seguenti

$$\boxed{r_t = r^t = (1+i)^t} \quad \boxed{v_t = v^t = (1-d)^t} \quad \boxed{i_t = (1+i)^t - 1} \quad \boxed{d_t = 1 - (1-d)^t}$$

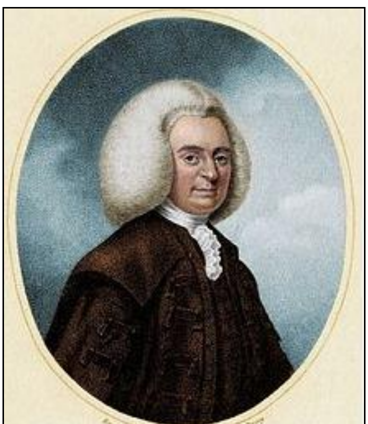
che costituiscono le relazioni del modello di calcolo del regime finanziario uniforme dell'interesse composto con tasso costante.

Schema generale delle relazioni esistenti tra grandezze finanziarie uniperiodali (effettive)

	$\boxed{r}$	$\boxed{v}$	$\boxed{i}$	$\boxed{d}$	$\boxed{\delta = h}$
$\boxed{r} =$	...	$\frac{1}{v}$	$1+i$	$\frac{1}{1-d}$	e^{δ}
$\boxed{v} =$	$\frac{1}{r}$	...	$\frac{1}{1+i}$	$1-d$	$e^{-\delta}$
$\boxed{i} =$	$r-1$	$\frac{1-v}{v}$	...	$\frac{d}{1-d}$	$e^{\delta}-1$
$\boxed{d} =$	$\frac{r-1}{r}$	$1-v$	$\frac{i}{1+i}$	...	$1-e^{-\delta}$
$\boxed{\delta = h} =$	$lg\, r$	$-lg\, v$	$lg(1+i)$	$-lg(1-d)$	...

Esercizio 1.7 (1) - Grandezze finanziarie uniperiodali >>>

Delle diverse funzioni finanziarie che legano i tassi d'interesse e di sconto con la forza (costante) d'interesse (= di sconto) è possibile dare delle valutazioni approssimate mediante gli sviluppi in serie di potenze introdotti da Taylor e sviluppati in particolare da Mac Laurin



***Colin Mac Laurin** (Kilmoran 1698 – Edimburgo 1746) è stato un matematico scozzese che ha fornito importanti contributi alla geometria e all'algebra e soprattutto all'analisi matematica (sviluppo delle serie di funzioni). Il suo nome è legato a un caso particolare della serie di Taylor detto appunto "serie di Mac Laurin". Si occupò inoltre del calcolo dei determinanti, dell'orbita del sole, della struttura degli alveari, dell'effetto del lavoro sul corpo umano e del fenomeno delle maree. Ad undici anni, Mac Laurin entrò all'Università di Glasgow, laureandosi tre anni dopo, discutendo una tesi sulla teoria della gravitazione universale di Isacco Newton, che a Londra nel 1721 conobbe direttamente. Sir Newton fu un suo estimatore, definendo Mac Laurin uno dei migliori matematici del suo tempo. Nel 1717 fu nominato professore di matematica al Università di Aberdeen. Qui introdusse la serie di Mac Laurin" (ossia la serie di Brook Taylor per x_0 centrato in zero) in uno dei suoi più importanti lavori, il "Treatise of functions", nel quale si proponeva di fondare in modo logicamente rigoroso il calcolo infinitesimale inventato da Newton. Nel 1725 ottenne la cattedra di matematica all'Università di Edimburgo con l'appoggio di Newton, che si offrì di coprire parzialmente (venti sterline l'anno) le spese del suo stipendio. All'Università di Edimburgo, dove ha insegnato anche un altro famoso matematico, James Gregory, trascorse tutto il resto della sua vita. Un'altra sua opera importante fu il "Treatise of algebra" concernente principalmente i sistemi lineari e il calcolo dei determinanti: lo stesso argomento fu trattato nella stessa epoca anche da Gabriel Cramer che pubblicò nel 1750 la nota regola di Cramer. Altro importante contributo alla matematica fu la formula di Eulero-Mac Laurin, introdotta intorno al 1735, che collegava nel calcolo infinitesimale l'integrale e le somme integrali. Mac Laurin morì nel 1746 all'età di soli 48 anni, indebolito e malato per le vicende che avevano coinvolto la città di Edimburgo nel 1745, a causa della marcia sulla città dell'esercito giacobita.*

L'espressione generale dello sviluppo in serie di potenze di una funzione secondo la formula di Mac Laurin è

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k=\frac{f^{(0)}(0)}{0!}x^0+\frac{f^{(1)}(0)}{1!}x^1+\frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2+\frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3+\ldots$$
$$=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3+\ldots\ ,\ x\in I_{conv}$$

e quelle relative agli sviluppi delle funzioni finanziarie

$$\delta(i)=lg(1+i)=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{i^k}{k}=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-i)^k}{k}=i-\frac{i^2}{2}+\frac{i^3}{3}-\frac{i^4}{4}+\ldots\ ,\ i\in(-1,1]$$

$$\delta(d)=-lg(1-d)=-\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{(-d)^k}{k}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{d^k}{k}=d+\frac{d^2}{2}+\frac{d^3}{3}+\ldots\ ,\ d\in[-1,1)$$

$$i(\delta)=e^{\delta}-1=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\delta^k}{k!}-1=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\delta^k}{k!}=\delta+\frac{\delta^2}{2!}+\frac{\delta^3}{3!}+\frac{\delta^4}{4!}+\ldots\ ,\ \delta\in(-\infty,+\infty)$$

$$d(\delta)=1-e^{-\delta}=1-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\delta)^k}{k!}=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-\delta)^k}{k!}=\delta-\frac{\delta^2}{2!}+\frac{\delta^3}{3!}-\frac{\delta^4}{4!}+\ldots\ ,\ \delta\in(-\infty,+\infty)$$

Esercizio 1.7 (2) - Approssimazione di grandezze finanziarie >>>

1.8 - Regime finanziario "uniforme scindibile" dell'interesse (e dello sconto) composto – Regime esponenziale

Il regime finanziario dell'interesse (e dello sconto) composto detto pure della capitalizzazione (e dell'attualizzazione) composta con tasso d'interesse (e di sconto) uniperiodale effettivo costante è caratterizzato da leggi finanziarie uniformi (dipendenti dalla sola durata dell'operazione finanziaria)

$$\boxed{r_t = (1+i)^t = r^t = v^{-t} = (1-d)^{-t}}$$

$$\boxed{v_t = (1-d)^t = v^t = r^{-t} = (1+i)^{-t}}$$

$$\boxed{i_t = (1+i)^t - 1 = r^t - 1 = v^{-t} - 1 = (1-d)^{-t} - 1}$$

$$\boxed{d_t = 1-(1-d)^t = 1 - v^t = 1 - r^{-t} = 1-(1+i)^{-t}}$$

e scindibili (i valori finanziari non cambiano in ipotesi di interruzione e ripresa dell'operazione finanziaria)

- ***durata intermedia***

$$\left.\begin{aligned}
&r_s \cdot r_{t-s} = r^s \cdot r^{t-s} = r^{s+t-s} = r^t = r_t \\
&v_s \cdot v_{t-s} = v^s \cdot v^{t-s} = v^{s+t-s} = v^t = v_t \\
&i_s + r_s \cdot i_{t-s} = r^s - 1 + r^s \cdot (r^{t-s} - 1) = \\
&\qquad = r^s - 1 + r^t - r^s = r^t - 1 = i_t \\
&v_{t-s} \cdot d_s + d_{t-s} = v^{t-s} \cdot (1 - v^s) + 1 - v^{t-s} = \\
&\qquad v^{t-s} - v^t + 1 - v^{t-s} = 1 - v^t = d_t
\end{aligned}\right\} \forall s \in [0,t]$$

- ***durata "intermedia" precedente***

$$\left.\begin{aligned}
&v_{-s} \cdot r_{t-s} = r^s \cdot r^{t-s} = r^{s+t-s} = r^t = r_t \\
&v_{t-s} \cdot r_{-s} = v^{t-s} \cdot v^s = v^{t-s+s} = v^t = v_t \\
&-d_{-s} + v_{-s} \cdot i_{t-s} = -(1 - v^{-s}) + r^s \cdot (r^{t-s} - 1) = \\
&\qquad = -1 + r^s + r^t - r^s == r^t - 1 = i_t \\
&-v_{t-s} \cdot i_{-s} + d_{t-s} = -v^{t-s} \cdot (v^s - 1) + (1 - v^{t-s}) = \\
&\qquad = -v^t + v^{t-s} + 1 - v^{t-s} == 1 - v^t = d_t
\end{aligned}\right\} \forall s \in (-\infty, 0)$$

- ***durata "intermedia" successiva***

$$\left.\begin{aligned}
&r_s \cdot v_{s-t} = r^s \cdot r^{-(s-t)} = r^{s-s+t} = r^t = r_t \\
&r_{s-t} \cdot v_s = v^{-(s-t)} \cdot v^s = v^{-s+t+s} = v^t = v_t \\
&i_s - r_s \cdot d_{s-t} = r^s - 1 - r^s \cdot (1 - v^{s-t}) = \\
&\qquad = r^s - 1 - r^s + r^t = r^t - 1 = i_t \\
&r_{s-t} \cdot d_s - i_{s-t} - = r^{s-t} \cdot (1 - v^s) - (r^{s-t} - 1) = \\
&\qquad = r^{s-t} - v^t - r^{s-t} + 1 = 1 - v^t = d_t
\end{aligned}\right\} \forall s \in (t, +\infty)$$

La forza d'interesse (e il rendimento a scadenza), come già visto nel paragrafo precedente, risulta costante e pari alla forza di sconto

$$\boxed{\delta = \frac{d\,lg\,r_t}{d\,t} = \frac{d\,lg\,r^t}{d\,t} = \frac{\frac{d\,r^t}{d\,t}}{r^t} = \frac{r^t \cdot lg\,r}{r^t} = lg\,r = lg(1+i) = -lg(1-d)}$$

$$\boxed{\rho = -\frac{d\,lg\,v_t}{d\,t} = -\frac{d\,lg\,v^t}{d\,t} = -\frac{\frac{d\,v^t}{d\,t}}{v^t} = -\frac{v^t \cdot lg\,v}{v^t} = -lg\,v = lg\,r = \delta}$$

e le diverse funzioni finanziarie sono quindi esprimibili, come già visto, in funzione della forza d'interesse

$$\boxed{r_t = e^{\delta t}} \qquad \boxed{v_t = e^{-\delta t}}$$

$$\boxed{i_t = e^{\delta t} - 1} \qquad \boxed{d_t = 1 - e^{-\delta t}}$$

Lo schema generale delle relazioni esistenti tra le diverse funzioni finanziarie e le grandezze uniperiodali nel caso del regime finanziario dell'interesse (e dello sconto) composto con tasso d'interesse (e di sconto) uniperiodale effettivo costante risulta

	$\boxed{r}$	$\boxed{v}$	$\boxed{i}$	$\boxed{d}$	$\boxed{\delta = h}$
$\boxed{r_t} =$	r^t	v^{-t}	$(1+i)^t$	$(1-d)^{-t}$	$e^{\delta t}$
$\boxed{v_t} =$	r^{-t}	v^t	$(1+i)^{-t}$	$(1-d)^t$	$e^{-\delta t}$
$\boxed{i_t} =$	$r^t - 1$	$v^{-t} - 1$	$(1+i)^t - 1$	$(1-d)^{-t} - 1$	$e^{\delta t} - 1$
$\boxed{d_t} =$	$1 - r^{-t}$	$1 - v^t$	$1-(1+i)^{-t}$	$1-(1-d)^t$	$1 - e^{-\delta t}$

e analogamente, lo schema generale delle relazioni esistenti tra le grandezze uniperiodali e le diverse funzioni finanziarie, sempre nel caso del regime finanziario dell'interesse (e dello sconto) composto con tasso d'interesse (e di sconto) uniperiodale effettivo costante risulta

	$\boxed{r_t}$	$\boxed{v_t}$	$\boxed{i_t}$	$\boxed{d_t}$
$\boxed{r} =$	$r_t^{\frac{1}{t}}$	$v_t^{-\frac{1}{t}}$	$(1+i_t)^{\frac{1}{t}}$	$(1-d_t)^{-\frac{1}{t}}$
$\boxed{v} =$	$r_t^{-\frac{1}{t}}$	$v_t^{\frac{1}{t}}$	$(1+i_t)^{-\frac{1}{t}}$	$(1-d_t)^{\frac{1}{t}}$
$\boxed{i} =$	$r_t^{\frac{1}{t}} - 1$	$v_t^{-\frac{1}{t}} - 1$	$(1+i_t)^{\frac{1}{t}} - 1$	$(1-d_t)^{-\frac{1}{t}} - 1$
$\boxed{d} =$	$1 - r_t^{-\frac{1}{t}}$	$1 - v_t^{\frac{1}{t}}$	$1-(1+i_t)^{-\frac{1}{t}}$	$1-(1-d_t)^{\frac{1}{t}}$
$\boxed{\delta = h} =$	$\frac{lg\, r_t}{t}$	$-\frac{lg\, v_t}{t}$	$\frac{lg(1+i_t)}{t}$	$-\frac{lg(1-d_t)}{t}$

Ipotizzando un tasso d'interesse effettivo costante positivo, delle quattro funzioni finanziarie è possibile effettuare un rapido studio analitico al fine di poterne esaminare l'andamento grafico:

- ***la funzione r_t risulta crescente e concava***

$$\boxed{r_0 = r^0 = 1 \ , \ \lim_{t \to +\infty} r^t = +\infty \ , \ (r^t)' = r^t\, lg\, r > 0 \ , \ (r^t)'' = r^t\, lg^2 r > 0}$$

- ***la funzione v_t risulta decrescente e concava***

$$v_0 = v^0 = 1 \ , \ \lim_{t\to+\infty} v^t = 0 \ , \ (v^t)' = v^t \lg v < 0 \ , \ (v^t)'' = v^t \lg^2 v > 0$$

- ***la funzione i_t risulta crescente e concava***

$$i_0 = 0 \ , \ \lim_{t\to+\infty} (r^t - 1) = +\infty \ , \ (r^t - 1)' = (r^t)' > 0 \ , \ (r^t - 1)'' = (r^t)'' > 0$$

- ***la funzione d_t risulta crescente e convessa***

$$d_0 = 0 = 1 \ , \ \lim_{t\to+\infty} (1 - v^t) = 1 \ , \ (1 - v^t)' = -(v^t)' > 0 \ , \ (1 - v^t)'' = -(v^t)'' < 0$$

Esercizio 1.8 (1) - Funzioni finanziarie al variare della durata >>>

Con riguardo a problemi relativi a importi non unitari, risultano immediatamente le seguenti relazioni, tramite le quali è possibile ricavare una delle grandezze finanziarie in funzione delle altre

$$M_t = P_0 r_t = P_0 r^t = P_0 (1+i)^t = P_0 (1-d)^{-t} = P_0 e^{\delta t}$$

$$P_0 = M_t v_t = M_t v^t = M_t (1-d)^t = M_t (1+i)^{-t} = M_t e^{-\delta t}$$

$$I_t = P_0 i_t = P_0 (r^t - 1) = P_0 ((1+i)^t - 1) = P_0 ((1-d)^{-t} - 1) = P_0 (e^{\delta t} - 1)$$

$$D_t = M_t d_t = M_t (1 - v^t) = M_t (1 - (1-d)^t) = M_t (1 - (1+i)^{-t}) = M_t (1 - e^{-\delta t})$$

$$i = \left(\frac{M_t}{P_0} \right)^{\frac{1}{t}} - 1 = r_t^{\frac{1}{t}} - 1 = e^{\delta} - 1$$

$$d = 1 - \left(\frac{P_0}{M_t} \right)^{\frac{1}{t}} = 1 - v_t^{\frac{1}{t}} = 1 - e^{-\delta}$$

$$\delta = lg\left(\frac{M_t}{P_0}\right)^{\frac{1}{t}} = \frac{lg\,M_t - lg\,P_0}{t} = lg\,r_t^{\frac{1}{t}} = \frac{lg\,r_t}{t} = -\,lg\,v_t^{\frac{1}{t}} = -\,\frac{lg\,v_t}{t}$$

$$t = \frac{lg\,M_t - lg\,P_0}{lg(1+i)} = \frac{lg\,M_t - lg\,P_0}{-\,lg(1-d)} = \frac{lg\,M_t - lg\,P_0}{\delta} = \frac{lg\,r_t}{\delta} = -\,\frac{lg\,v_t}{\delta}$$

Esercizio 1.8 (2) - Calcolo di montanti >>>
Esercizio 1.8 (3) - Calcolo di valori attuali >>>
Esercizio 1.8 (4) - Calcolo di interessi e sconti >>>
Esercizio 1.8 (5) - Calcolo di tassi di interesse e di sconto >>>
Esercizio 1.8 (6) - Calcolo del tempo >>>
Esercizio 1.8 (7) - Calcolo di capitali impiegati >>>

<u>Calcolo del periodo di raddoppio di un capitale.</u>

Il *Ritratto di Luca Pacioli* – attribuzione dubbia a Jacopo de' Barbari e esposto al Museo di Capodimonte (Napoli) – rappresenta il matematico intento a spiegare uno dei teoremi di Euclide

Fra' Luca Bartolomeo de Pacioli *o anche Paciolo (Sansepolcro, c. 1445 – 1514 o 1517) francescano e matematico italiano, fu un*

insegnante di matematica e collaborò con Leonardo da Vinci. Nel 1494 pubblicò a Venezia una vera enciclopedia della matematica "Summa de arithmetica, geometria, proportioni e proportionalità", scritta in volgare, contenente un trattato generale di aritmetica e di algebra con elementi di aritmetica utilizzata dai mercanti (uno dei capitoli è intitolato "Tractatus de computis et scripturis", in cui viene presentato per la prima volta il concetto di partita doppia che si diffuse per tutta Europa col nome di "metodo veneziano"). Tra il 1496 e il 1508 pubblicò l'opera "De viribus quantitatis" divisa in tre parti (la prima parte "Delle forze naturali cioè de Aritmetica" è quella più importante per la storia della matematica, perché costituisce la prima grande collezione di giochi matematici e problemi dilettevoli, la seconda parte "Della virtù et forza lineare et geometria" riguarda giochi topologici e infine la terza parte "De documenti morali utilissimi" riguarda argomenti diversi). Nel 1509 scrisse la traduzione latina del trattato sulla geometria di Euclide e pubblicò l'opera "De Divina Proportione", relativa a questioni attinenti al rapporto aureo e alla matematica connessa ai solidi platonici ossia ai poliedri regolari (tetraedro, esaedro, ottaedro, dodecaedro e icosaedro) con incisioni dovute a Leonardo da Vinci e temi di architettura (presi da Vitruvio e da Leon Battista Alberti), a questioni relative alla prospettiva (prese dal suo concittadino Piero della Francesca e da Melozzo da Forlì e Marco Palmezzano). Luca Paciolo è anche autore del trattato "De ludo scachorum", prezioso manoscritto sul gioco degli scacchi, scritto a Mantova per Isabella d'Este, ritrovato dopo cinquecento anni, nel 2006, presso la biblioteca della Fondazione Coronini di Gorizia.

Luca Paciolo, con considerazioni di tipo algebrico, propose come formula per il calcolo del periodo del raddoppio di un capitale il rapporto tra il numero 72 e il tasso di remunerazione (espresso in termini percentuali)

$$\boxed{t(i,2) = \frac{72}{100\,i} = \frac{0.72}{i}}$$

La rivisitazione in termini moderni dell'algoritmo di Luca Paciolo

richiede la conoscenza dei logaritmi e degli sviluppi in serie di Mac Laurin

$$t(i,2)=\frac{lg(2P_0)-lg\,P_0}{\delta}=\frac{lg(2P_0)-lg\,P_0}{lg(1+i)}=\frac{lg\,2}{lg(1+i)}=\frac{0.69315}{lg(1+i)}$$

Ricordando lo sviluppo secondo la formula di Mac Laurin delle due funzioni sottoindicate e considerando le relative espressioni approssimate al termine di primo (e secondo grado)

$$lg(1+i)=\underbrace{-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-i)^k}{k}=i-\frac{i^2}{2}+\frac{i^3}{3}-\frac{i^4}{4}+\dots}_{i\in(-1,1]}\simeq\begin{cases} i \\ i-\dfrac{i^2}{2}=i\,(1-\dfrac{i}{2})\end{cases}$$

$$\frac{1}{1-\frac{i}{2}}=\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}i^k=1+\frac{i}{2}+\left(\frac{i}{2}\right)^2+\left(\frac{i}{2}\right)^3+\left(\frac{i}{2}\right)^4+\dots}_{\frac{i}{2}\in(-1,1)}\simeq 1+\frac{i}{2}$$

da cui segue

$$\frac{1}{lg(1+i)}\simeq\begin{cases}\dfrac{1}{i} \\ \dfrac{1}{i\,(1-\frac{i}{2})}\simeq\dfrac{1}{i}(1+\dfrac{i}{2})=\dfrac{1}{i}+\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

$$t(i,2)=\frac{lg\,2}{lg(1+i)}\simeq\begin{cases}\dfrac{0.69315}{i} \\ 0.69315\left(\dfrac{1}{i}+\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{0.69315}{i}+0.34657\end{cases}$$

e in generale

$$t(i,k)=\frac{lg\,k}{lg(1+i)}\simeq lg\,k\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{2}\right)$$

ossia, ad esempio,

$$t(i,3)=\frac{lg\,3}{lg(1+i)}\simeq\begin{cases}\dfrac{1.09861}{i}\\ 1.09861\left(\dfrac{1}{i}+\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1.09861}{i}+0.54930\end{cases}$$

$$t(i,4)=\frac{lg\,4}{lg(1+i)}\simeq\begin{cases}\dfrac{1.38630}{i}\\ 1.38630\left(\dfrac{1}{i}+\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1.38630}{i}+0.69315\end{cases}$$
$$=\frac{lg\,2^2}{lg(1+i)}=\frac{2\,lg\,2}{lg(1+i)}=2\,t(i,2)$$

Esercizio 1.8 (8) - Calcolo del periodo di raddoppio (1) >>>
Esercizio 1.8 (9) - Calcolo del periodo di raddoppio (2) >>>

Utilizzando la formula dello sviluppo in serie di potenze di una funzione secondo la teoria di Mac Laurin, con riguardo al fattore di capitalizzazione del regime finanziario dell'interesse composto, risulta

$$r_t=(1+i)^t=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{t}{k}i^k=1+\binom{t}{1}i+\binom{t}{2}i^2+\binom{t}{3}i^3+\binom{t}{4}i^4+\ldots$$

e da tale relazione è possibile ottenere espressioni approssimate di tale fattore "esponenziale", che permettano di caratterizzare ulteriori regimi finanziari, i quali saranno oggetto di esame nei successivi paragrafi:

- ***regime finanziario dell'interesse "lineare"***

$$\boxed{(1+i)^t \simeq 1+i\binom{t}{1}=1+i\,t}$$

- ***regime finanziario dell'interesse "parabolico"***

$$\boxed{(1+i)^t \simeq 1+i\binom{t}{1}+i^2\binom{t}{2}=1+i\,t+i^2\,\frac{t\,(t-1)}{2}=1+i\,t\left(1+i\,\frac{t-1}{2}\right)}$$

- ***regime finanziario dell'interesse "cubico"***

$$\boxed{\begin{aligned}&(1+i)^t \simeq 1+i\binom{t}{1}+i^2\binom{t}{2}+i^3\binom{t}{3}=\\ &\quad 1+i\,t+i^2\,\frac{t\,(t-1)}{2}+i^3\,\frac{t\,(t-1)(t-2)}{6}==1+i\,t\left(1+i\,\frac{t-1}{2}\left(1+i\,\frac{t-2}{3}\right)\right)\end{aligned}}$$

- ***regime finanziario dell'interesse "polinomiale"***

$$\boxed{\begin{aligned}&(1+i)^t \simeq 1+i\binom{t}{1}+i^2\binom{t}{2}+i^3\binom{t}{3}+\ldots+i^n\binom{t}{n}=\\ &\quad =1+i\,t+i^2\,\frac{t\,(t-1)}{2}+i^3\,\frac{t\,(t-1)(t-2)}{6}+\ldots+i^n\,\frac{t\,(t-1)\ldots(t-n+1)}{n!}=\\ &\quad =1+i\,t\left(1+i\,\frac{t-1}{2}\left(1+i\,\frac{t-2}{3}\left(\ldots\left(1+i\,\frac{t-n+1}{n}\right)\right)\right)\right)\end{aligned}}$$

Analogamente, con riguardo al fattore di attualizzazione del regime finanziario dello sconto composto, risulta

$$\boxed{v_t=(1-d)^t=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{t}{k}(-d)^k=1-\binom{t}{1}d+\binom{t}{2}d^2-\binom{t}{3}d^3+\binom{t}{4}d^4-\ldots}$$

- ***regime finanziario dello sconto "lineare"***

$$\boxed{(1-d)^t \simeq 1-d\binom{t}{1} = \underbrace{1-d\,t}_{>0}}$$

- ***regime finanziario dello sconto "parabolico"***

$$\boxed{(1-d)^t \simeq 1-d\binom{t}{1}+d^2\binom{t}{2} = 1-d\,t+d^2\,\frac{t\,(t-1)}{2} = \underbrace{1-d\,t\left(1-d\,\frac{t-1}{2}\right)}_{>0}}$$

- ***regime finanziario dello sconto "cubico"***

$$\begin{aligned}(1-d)^t &\simeq 1-d\binom{t}{1}+d^2\binom{t}{2}-d^3\binom{t}{3} = \\ &= 1-d\,t+d^2\,\frac{t\,(t-1)}{2}-d^3\,\frac{t\,(t-1)(t-2)}{6} = \underbrace{1-d\,t\left(1-d\,\frac{t-1}{2}\left(1-d\,\frac{t-2}{3}\right)\right)}_{>0}\end{aligned}$$

- ***regime finanziario dello sconto "polinomiale"***

$$\begin{aligned}(1-d)^t &\simeq 1-d\binom{t}{1}+d^2\binom{t}{2}-d^3\binom{t}{3}+\ldots+(-d)^n\binom{t}{n} = \\ &= 1-d\,t+d^2\,\frac{t\,(t-1)}{2}-d^3\,\frac{t\,(t-1)(t-2)}{6}+\ldots+(-d)^n\,\frac{t\,(t-1)\ldots(t-n+1)}{n!} = \\ &= \underbrace{1-d\,t\left(1-\frac{t-1}{2}d\left(1-\frac{t-2}{3}d\left(\ldots\left(1-d\,\frac{t-n+1}{n}\right)\right)\right)\right)}_{>0}\end{aligned}$$

1.9 - Regime finanziario "uniforme non scindibile" dell'interesse semplice (e dello sconto razionale) – Regime lineare

Il regime finanziario dell'interesse semplice (e dello sconto razionale) detto pure della capitalizzazione semplice (e dell'attualizzazione razionale) con tasso d'interesse (e di sconto) uniperiodale effettivo costante è caratterizzato da leggi finanziarie uniformi (dipendenti dalla sola durata dell'operazione finanziaria)

$$\boxed{r_t = 1 + i\,t = 1 + (r-1)t = \frac{1+(1-v)(t-1)}{v} = \frac{1+d(t-1)}{1-d}}$$

$$\boxed{v_t = \frac{1}{1+i\,t} = \frac{1}{1+(r-1)t} = \frac{v}{1+(1-v)(t-1)} = \frac{1-d}{1+d\,(t-1)}}$$

$$\boxed{i_t = i\,t = (r-1)t = \frac{(1-v)t}{v} = \frac{d\,t}{1-d}}$$

$$\boxed{d_t = \frac{i\,t}{1+i\,t} = \frac{(r-1)t}{1+(r-1)t} = \frac{(1-v)t}{1+(1-v)(t-1)} = \frac{d\,t}{1+d(t-1)}}$$

e non scindibili (i valori finanziari cambiano in ipotesi di interruzione e ripresa dell'operazione finanziaria, nel caso di durata intermedia, anche "intermedia" precedente o successiva)

- ***durata intermedia***

$$\boxed{r_s \cdot r_{t-s} = (1+i\,s)\cdot(1+i\,(t-s)) = 1+i\,t+i^2 s(t-s) \neq r_t \ \ , \ \ \forall s \in (0,t)}$$

- ***durata "intermedia" precedente***

$$\boxed{v_{-s} \cdot r_{t-s} = \frac{1+i\,(t-s)}{1-i\,s} = 1+i\,t+\frac{i^2 s t}{1-i\,s} \neq r_t \ \ , \ \ \forall s \in (-\infty,0)}$$

- ***durata "intermedia' successiva***

$$r_s \cdot v_{s-t} = \frac{1+is}{1+i(s-t)} = 1+it - \frac{i^2 t(s-t)}{1+i(s-t)} \neq r_t \quad , \quad \forall s \in (t,+\infty)$$

La forza d'interesse, come già indicato nel paragrafo precedente, risulta non costante e pari alla forza di sconto

$$\delta_t = \frac{d\, lg\, r_t}{dt} = \frac{d\, lg(1+it)}{dt} = \frac{\frac{d(1+it)}{dt}}{1+it} = \frac{i}{1+it} = \frac{d}{1+d(t-1)}$$

$$\rho_t = -\frac{d\, lg v_t}{dt} = -\frac{d\, lg \frac{1}{1+it}}{dt} = -\frac{d(-lg(1+it))}{dt} = \frac{d\, lg(1+it)}{dt} = \delta_t$$

- ***la funzione δ_t risulta decrescente e concava***

$$\delta_0 = i \quad , \quad \lim_{t\to+\infty} \frac{i}{1+it} = 0 \quad , \quad \left(\frac{i}{1+it}\right)' = -\frac{i^2}{(1+it)^2} < 0 \quad , \quad \left(\frac{i}{1+it}\right)'' = \frac{2i^3}{(1+it)^3} > 0$$

risultando ovviamente

$$\int_0^t \delta_w\, dw = \int_0^t \frac{i}{1+iw} dw = \int_0^t \frac{d\, lg(1+iw)}{dw} dw = \left[lg(1+iw)\right]_0^t = lg(1+it)$$

$$r_t = e^{\int_0^t \delta_w\, dw} = e^{lg(1+it)} = 1+it \qquad v_t = e^{-\int_0^t \delta_w\, dw} = e^{-lg(1+it)} = e^{lg\frac{1}{1+it}} = \frac{1}{1+it}$$

Lo schema generale delle relazioni esistenti tra le diverse funzioni finanziarie e le grandezze uniperiodali nel caso del regime finanziario dell'interesse semplice (e dello sconto razionale) con tasso d'interesse (e di sconto) uniperiodale effettivo costante e

analogamente lo schema generale delle relazioni esistenti tra le grandezze uniperiodali e le diverse funzioni finanziarie risultano

	$\boxed{r}$	$\boxed{v}$	$\boxed{i}$	$\boxed{d}$
$\boxed{r_t} =$	$1+(r-1)t$	$\frac{1+(1-v)(t-1)}{v}$	$1+i\,t$	$\frac{1+d\,(t-1)}{1-d}$
$\boxed{v_t} =$	$\frac{1}{1+(r-1)t}$	$\frac{v}{1+(1-v)(t-1)}$	$\frac{1}{1+i\,t}$	$\frac{1-d}{1+d\,(t-1)}$
$\boxed{i_t} =$	$(r-1)t$	$\frac{(1-v)t}{v}$	$i\,t$	$\frac{d\,t}{1-d}$
$\boxed{d_t} =$	$\frac{(r-1)t}{1+(r-1)t}$	$\frac{(1-v)t}{1+(1-v)(t-1)}$	$\frac{i\,t}{1+i\,t}$	$\frac{d\,t}{1+d\,(t-1)}$
$\boxed{\delta_t} =$	$\frac{r-1}{1+(r-1)t}$	$\frac{1-v}{1+(1-v)(t-1)}$	$\frac{i}{1+i\,t}$	$\frac{d}{1+d\,(t-1)}$

	$\boxed{r_t}$	$\boxed{v_t}$	$\boxed{i_t}$	$\boxed{d_t}$	$\boxed{\delta_t}$
$\boxed{i} =$	$\frac{r_t-1}{t}$	$\frac{1-v_t}{v_t\,t}$	$\frac{i_t}{t}$	$\frac{d_t}{(1-d_t)t}$	$\frac{\delta_t}{1-\delta_t\,t}$
$\boxed{d} =$	$\frac{r_t-1}{r_t+t-1}$	$\frac{1-v_t}{1+v_t(t-1)}$	$\frac{i_t}{i_t+t}$	$\frac{d_t}{1+(1-d_t)(t-1)}$	$\frac{\delta_t}{1-\delta_t(t-1)}$

Ipotizzando un tasso d'interesse effettivo costante positivo, delle quattro funzioni finanziarie è possibile effettuare un rapido studio analitico al fine di poterne esaminare l'andamento grafico:

- ***la funzione r_t risulta crescente e rettilinea***

$$\boxed{r_0=1 \;,\; \lim_{t\to+\infty}(1+i\,t)=+\infty \;,\; (1+i\,t)'=i>0 \;,\; (1+i\,t)''=0}$$

- ***la funzione v_t risulta decrescente e concava***

$$v_0 = 1 \ , \ \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{1+i\,t} = 0 \ , \ \left(\frac{1}{1+i\,t}\right)' = -\frac{i}{(1+i\,t)^2} < 0 \ , \ \left(\frac{1}{1+i\,t}\right)'' = \frac{2i^2}{(1+i\,t)^3} > 0$$

- ***la funzione i_t risulta crescente e rettilinea***

$$i_0 = 0 \ , \ \lim_{t\to+\infty} (i\,t) = +\infty \ , \ (i\,t)' = i > 0 \ , \ (i\,t)'' = 0$$

- ***la funzione d_t risulta crescente e convessa***

$$d_0 = 0 \ , \ \lim_{t\to+\infty} \frac{i\,t}{1+i\,t} = 1 \ , \ \left(\frac{i\,t}{1+i\,t}\right)' = \frac{i}{(1+i\,t)^2} > 0 \ , \ \left(\frac{i\,t}{1+i\,t}\right)'' = -\frac{2i^2}{(1+i\,t)^3} < 0$$

Esercizio 1.9 (1) - Funzioni finanziarie al variare della durata >>>

Con riguardo a problemi relativi a importi non unitari, risultano immediatamente le seguenti relazioni, tramite le quali è possibile ricavare una delle grandezze finanziarie in funzione delle altre

$$M_t = P_0\, r_t = P_0 (1 + i\,t) = \frac{P_0 (1 + d(t-1))}{1-d}$$

$$P_0 = M_t\, v_t = \frac{M_t (1-d)}{1 + d(t-1)} = \frac{M_t}{1+i\,t}$$

$$I_t = P_0\, i_t = P_0\, i\,t = \frac{P_0\, d\,t}{1-d}$$

$$D_t = M_t\, d_t = \frac{M_t\, d\,t}{1 + d\,(t-1)} = \frac{M_t\, i\,t}{1+i\,t}$$

$$i = \frac{\frac{M_t}{P_0} - 1}{t} = \frac{M_t - P_0}{P_0\, t} = \frac{r_t - 1}{t}$$

$$d=\frac{M_t-P_0}{M_t+P_0(t-1)}=\frac{1-\dfrac{P_0}{M_t}}{1+\dfrac{P_0}{M_t}(t-1)}=\frac{1-v_t}{1+v_t(t-1)}$$

$$t=\frac{\dfrac{M_t}{P_0}-1}{i}=\frac{M_t-P_0}{P_0\,i}=\frac{r_t-1}{i}=\frac{1-v_t}{v_t\,i}=\frac{1-\dfrac{P_0}{M_t}}{\dfrac{P_0}{M_t}\dfrac{d}{1-d}}=\frac{(M_t-P_0)(1-d)}{P_0\,d}$$

Esercizio 1.9 (2) - Calcolo di montanti >>>
Esercizio 1.9 (3) - Calcolo di valori attuali >>>
Esercizio 1.9 (4) - Calcolo di interessi e sconti >>>
Esercizio 1.9 (5) - Calcolo di tassi di interesse e di sconto >>>
Esercizio 1.9 (6) - Calcolo del tempo >>>
Esercizio 1.9 (7) - Calcolo di capitali impiegati >>>
Esercizio 1.9 (8) - Calcolo del periodo di raddoppio (2) >>>

1.10 - Regime finanziario “uniforme non scindibile” dello sconto commerciale (e dell’interesse iperbolico) – Regime iperbolico

Il regime finanziario dello sconto commerciale (e dell’interesse iperbolico) detto pure dell’attualizzazione commerciale (e della capitalizzazione iperbolica) con tasso di sconto (e d’interesse) uniperiodale effettivo costante è caratterizzato da leggi finanziarie uniformi (dipendenti dalla sola durata dell’operazione finanziaria)

$$v_t=\underbrace{1-d\,t}_{t<\frac{1}{d}}=\underbrace{1-(1-v)\,t}_{t<\frac{1}{1-v}}=\underbrace{\frac{1-(r-1)(t-1)}{r}}_{t<\frac{r}{r-1}}=\underbrace{\frac{1-i\,(t-1)}{1+i}}_{t<1+\frac{1}{i}}$$

$$r_t = \underbrace{\frac{1}{1-d\,t}}_{t<\frac{1}{d}} = \underbrace{\frac{1}{1-(1-v)t}}_{t<\frac{1}{1-v}} = \underbrace{\frac{r}{1-(r-1)(t-1)}}_{t<\frac{r}{r-1}} = \underbrace{\frac{1+i}{1-i\,(t-1)}}_{t<1+\frac{1}{i}}$$

$$d_t = \underset{t<\frac{1}{d}}{d\,t} = \underbrace{(1-v)t}_{t<\frac{1}{1-v}} = \underbrace{\frac{(r-1)t}{r}}_{t<\frac{r}{r-1}} = \underset{t<1+\frac{1}{i}}{\frac{i\,t}{1+i}}$$

$$i_t = \underbrace{\frac{d\,t}{1-d\,t}}_{t<\frac{1}{d}} = \underbrace{\frac{(1-v)t}{1-(1-v)t}}_{t<\frac{1}{1-v}} = \underbrace{\frac{(r-1)t}{1-(r-1)(t-1)}}_{t<\frac{r}{r-1}} = \underbrace{\frac{i\,t}{1-i\,(t-1)}}_{t<1+\frac{1}{i}}$$

e non scindibili (i valori finanziari cambiano in ipotesi di interruzione e ripresa dell'operazione finanziaria, nel caso di durata intermedia, anche "intermedia" precedente o successiva)

- ***durata intermedia***

$$v_s \cdot v_{t-s} = (1-d\,s)\cdot(1-d\,(t-s)) = 1-d\,t+d^2 s(t-s) \neq v_t \quad , \quad \forall s \in (0, \underset{<\frac{1}{d}}{t})$$

- ***durata "intermedia" precedente***

$$v_{t-s}\cdot r_{-s} = \frac{1-d\,(t-s)}{1+d\,s} = 1-d\,t+\frac{d^2 st}{1+d\,s} \neq v_t \quad , \quad \forall s \in (t-\frac{1}{d}, 0)$$

- ***durata "intermedia" successiva***

$$r_{s-t}\cdot v_s = \frac{1-d\,s}{1-d\,(s-t)} = 1-d\,t-\frac{d^2 t(s-t)}{1-d\,(s-t)} \neq v_t \quad , \quad \forall s \in (t, \frac{1}{d})$$

La forza di sconto, come già indicato nel paragrafo precedente, risulta non costante e pari alla forza d'interesse

$$\rho_t = -\frac{d\,lg v_t}{d\,t} = -\frac{d\,lg(1-d\,t)}{d\,t} = -\frac{\frac{d\,(1-d\,t)}{d\,t}}{1-d\,t} = \frac{d}{\underbrace{1-d\,t}_{t<\frac{1}{d}}} = \frac{i}{\underbrace{1-i\,(t-1)}_{t<1+\frac{1}{i}}}$$

$$\delta_t = \frac{d\,lg\,r_t}{d\,t} = \frac{d\,lg\frac{1}{1-d\,t}}{d\,t} = \frac{d(-lg(1-d\,t))}{d\,t} == -\frac{d(lg(1-d\,t))}{d\,t} = \rho_t$$

- ***la funzione*** δ_t ***risulta crescente e concava***

$$\delta_0 = d \quad , \quad \lim_{t\to\left(\frac{1}{d}\right)^-} \frac{d}{1-d\,t} = +\infty \quad , \quad \left(\frac{d}{1-d\,t}\right)' = \frac{d^2}{(1-d\,t)^2} > 0 \quad , \quad \left(\frac{d}{1-d\,t}\right)'' = \frac{2d^3}{(1-d\,t)^3} > 0$$

risultando ovviamente

$$\int_0^t \delta_w\,dw = \int_0^t \frac{d}{1-d\,w}dw = \int_0^t\left(-\frac{d\,lg(1-d\,w)}{d\,w}\right)dw = -\left[lg(1-d\,w)\right]_0^t =$$
$$= -\,lg(1-d\,t) = lg\frac{1}{\underbrace{1-d\,t}_{t<\frac{1}{d}}}$$

$$v_t = e^{-\int_0^t \delta_w\,dw} = e^{lg(1-d\,t)} = \underbrace{1-d\,t}_{t<\frac{1}{d}}$$

$$r_t = e^{\int_0^t \delta_w\,dw} = e^{lg\frac{1}{1-d\,t}} = \frac{1}{\underbrace{1-d\,t}_{t<\frac{1}{d}}}$$

Lo schema generale delle relazioni esistenti tra le diverse funzioni finanziarie e le grandezze uniperiodali nel caso del regime

finanziario dello sconto commerciale (e dell'interesse iperbolico) con tasso di sconto (e d'interesse) uniperiodale effettivo costante e analogamente lo schema generale delle relazioni esistenti tra le grandezze uniperiodali e le diverse funzioni finanziarie risultano

$$
\begin{array}{lcccc}
 & \boxed{r} & \boxed{v} & \boxed{i} & \boxed{d} \\
\boxed{r_t} = & \underbrace{\dfrac{r}{1-(r-1)(t-1)}}_{t<\frac{r}{r-1}} & \underbrace{\dfrac{1}{1-(1-v)t}}_{t<\frac{1}{1-v}} & \underbrace{\dfrac{1+i}{1-i(t-1)}}_{t<1+\frac{1}{i}} & \underbrace{\dfrac{1}{1-dt}}_{t<\frac{1}{d}} \\
\boxed{v_t} = & \underbrace{\dfrac{1-(r-1)(t-1)}{r}}_{t<\frac{r}{r-1}} & \underbrace{1-(1-v)t}_{t<\frac{1}{1-v}} & \underbrace{\dfrac{1-i(t-1)}{1+i}}_{t<1+\frac{1}{i}} & \underbrace{1-dt}_{t<\frac{1}{d}} \\
\boxed{i_t} = & \underbrace{\dfrac{(r-1)t}{1-(r-1)(t-1)}}_{t<\frac{r}{r-1}} & \underbrace{\dfrac{(1-v)t}{1-(1-v)t}}_{t<\frac{1}{1-v}} & \underbrace{\dfrac{it}{1-i(t-1)}}_{t<1+\frac{1}{i}} & \underbrace{\dfrac{dt}{1-dt}}_{t<\frac{1}{d}} \\
\boxed{d_t} = & \underbrace{\dfrac{(r-1)t}{r}}_{t<\frac{r}{r-1}} & \underbrace{(1-v)t}_{t<\frac{1}{1-v}} & \underbrace{\dfrac{it}{1+i}}_{t<1+\frac{1}{i}} & \underbrace{dt}_{t<\frac{1}{d}} \\
\boxed{\delta_t} = & \underbrace{\dfrac{r-1}{1-(r-1)(t-1)}}_{t<\frac{r}{r-1}} & \underbrace{(1-v)t}_{t<\frac{1}{1-v}} & \underbrace{\dfrac{i}{1-i(t-1)}}_{t<1+\frac{1}{i}} & \underbrace{\dfrac{d}{1-dt}}_{t<\frac{1}{d}}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lccccc}
 & \boxed{r_t} & \boxed{v_t} & \boxed{i_t} & \boxed{d_t} & \boxed{\delta_t} \\
\boxed{i} = & \dfrac{r_t-1}{r_t(t-1)+1} & \dfrac{1-v_t}{t-1+v_t} & \dfrac{i_t}{(1+i_t)(t-1)+1} & \dfrac{d_t}{t-d_t} & \dfrac{\delta_t}{1+\delta_t(t-1)} \\
\boxed{d} = & \dfrac{r_t-1}{r_t t} & \dfrac{1-v_t}{t} & \dfrac{i_t}{(1+i_t)t} & \dfrac{d_t}{t} & \dfrac{\delta_t}{1+\delta_t t}
\end{array}
$$

Ipotizzando un tasso di sconto effettivo costante positivo, delle quattro funzioni finanziarie è possibile effettuare un rapido studio analitico al fine di poterne esaminare l'andamento grafico:

- ***la funzione r_t risulta crescente e concava***

$$r_0 = 1 \; , \; \lim_{t \to \left(\frac{1}{d}\right)^-} \frac{1}{1-d\,t} = +\infty \; , \; \left(\frac{1}{1-d\,t}\right)' = \frac{d}{(1-d\,t)^2} > 0 \; , \; \left(\frac{1}{1-d\,t}\right)'' = \frac{2d^2}{(1-d\,t)^3} > 0$$

- ***la funzione v_t risulta decrescente e rettilinea***

$$v_0 = 1 \; , \; \lim_{t \to \left(\frac{1}{d}\right)^-} (1-d\,t) = 0 \; , \; (1-d\,t)' = -d < 0 \; , \; (1-d\,t)'' = 0$$

- ***la funzione i_t risulta crescente e concava***

$$i_0 = 0 \; , \; \lim_{t \to \left(\frac{1}{d}\right)^-} \frac{d\,t}{1-d\,t} = +\infty \; , \; \left(\frac{d\,t}{1-d\,t}\right)' = \frac{d}{(1-d\,t)^2} > 0 \; , \; \left(\frac{d\,t}{1-d\,t}\right)'' = \frac{2d^2}{(1-d\,t)^3} > 0$$

- ***la funzione d_t risulta crescente e rettilinea***

$$d_0 = 0 \; , \; \lim_{t \to \left(\frac{1}{d}\right)^-} (d\,t) = 1 \; , \; (d\,t)' = i > 0 \; , \; (d\,t)'' = 0$$

Esercizio 1.10 (1) - Funzioni finanziarie al variare della durata >>>

Con riguardo a problemi relativi a importi non unitari, risultano immediatamente le seguenti relazioni, tramite le quali è possibile ricavare una delle grandezze finanziarie in funzione delle altre

$$P_0 = M_t v_t = \underbrace{M_t (1 - d\,t)}_{t < \frac{1}{d}} = \underbrace{\frac{M_t (1 - i(t-1))}{1+i}}_{t < 1 + \frac{1}{i}}$$

$$M_t = P_0\, r_t = \frac{P_0 (1+i)}{\underbrace{1 - i(t-1)}_{t < 1 + \frac{1}{i}}} = \frac{P_0}{\underbrace{1 - d\,t}_{>0 \Rightarrow t < \frac{1}{d}}}$$

$$D_t = M_t\, d_t = \underbrace{M_t\, d\, t}_{t < \frac{1}{d}} = \frac{M_t\, i\, t}{\underbrace{1+i}_{t < 1 + \frac{1}{i}}}$$

$$I_t = P_0\, i_t = \frac{P_0\, i\, t}{\underbrace{1 - i(t-1)}_{t < 1 + \frac{1}{i}}} = \frac{P_0\, d\, t}{\underbrace{1 - d\,t}_{t < \frac{1}{d}}}$$

$$d = \frac{1 - \frac{P_0}{M_t}}{t} = \frac{M_t - P_0}{M_t\, t} = \frac{1 - v_t}{t}$$

$$i = \frac{M_t - P_0}{M_t (t-1) + P_0} = \frac{\frac{M_t}{P_0} - 1}{\frac{M_t}{P_0}(t-1) + 1} = \frac{r_t - 1}{r_t (t-1) + 1}$$

$$t = \frac{1 - \frac{P_0}{M_t}}{d} = \frac{M_t - P_0}{M_t\, d} = \frac{1 - v_t}{d} = \frac{r_t - 1}{r_t\, d} = \frac{\frac{M_t}{P_0} - 1}{\frac{M_t}{P_0}\,\frac{i}{1+i}} = \frac{(M_t - P_0)(1+i)}{M_t\, i}$$

Esercizio 1.10 (2) - Calcolo di montanti >>>
Esercizio 1.10 (3) - Calcolo di valori attuali >>>
Esercizio 1.10 (4) - Calcolo di interessi e sconti >>>
Esercizio 1.10 (5) - Calcolo di tassi di interesse e di sconto >>>
Esercizio 1.10 (6) - Calcolo del tempo >>>
Esercizio 1.10 (7) - Calcolo di capitali impiegati >>>
Esercizio 1.10 (8) - Calcolo del periodo di raddoppio (2) >>>

1.11 – Confronti tra regimi finanziari

Riepilogo delle formule caratteristiche dei tre regimi finanziari

$$\boxed{r_t} = \begin{array}{ccc} \boxed{cc} & \boxed{cs} & \boxed{ch} \\ \begin{cases} (1+i)^t \\ (1-d)^{-t} \end{cases} & \begin{cases} 1+it \\ \dfrac{1+d(t-1)}{1-d} \end{cases} & \begin{cases} \underbrace{\dfrac{1+i}{1-i(t-1)}}_{t<1+\frac{1}{i}} \\ \underbrace{\dfrac{1}{1-dt}}_{t<\frac{1}{d}} \end{cases} \end{array}$$

$$\boxed{v_t} = \begin{array}{ccc} \boxed{cc} & \boxed{cs} & \boxed{ch} \\ \begin{cases} (1+i)^{-t} \\ (1-d)^{t} \end{cases} & \begin{cases} \dfrac{1}{1+it} \\ \dfrac{1-d}{1+d(t-1)} \end{cases} & \begin{cases} \underbrace{\dfrac{1-i(t-1)}{1+i}}_{t<1+\frac{1}{i}} \\ \underbrace{1-dt}_{t<\frac{1}{d}} \end{cases} \end{array}$$

$$\boxed{i_t} = \begin{cases} (1+i)^t - 1 \\ (1-d)^{-t} - 1 \end{cases} \quad \begin{cases} i\,t \\ \dfrac{d\,t}{1-d} \end{cases} \quad \begin{cases} \underbrace{\dfrac{i\,t}{1-i(t-1)}}_{t<1+\frac{1}{i}} \\ \underbrace{\dfrac{d\,t}{1-d\,t}}_{t<\frac{1}{d}} \end{cases}$$

(columns: $\boxed{cc}$, $\boxed{cs}$, $\boxed{ch}$)

$$\boxed{d_t} = \begin{cases} 1-(1+i)^{-t} \\ 1-(1-d)^t \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{i\,t}{1+i\,t} \\ \dfrac{d\,t}{1+d(t-1)} \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{i\,t}{1+i} \quad t<1+\frac{1}{i} \\ d\,t \quad t<\frac{1}{d} \end{cases}$$

(columns: $\boxed{cc}$, $\boxed{cs}$, $\boxed{ch}$)

$$\boxed{\delta_t} = \begin{cases} lg(1+i) \\ -lg(1-d) \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{i}{1+i\,t} \\ \dfrac{d}{1+d(t-1)} \end{cases} \quad \begin{cases} \underbrace{\dfrac{i}{1-i(t-1)}}_{t<1+\frac{1}{i}} \\ \underbrace{\dfrac{d}{1-d\,t}}_{t<\frac{1}{d}} \end{cases}$$

(columns: $\boxed{cc}$, $\boxed{cs}$, $\boxed{ch}$)

Esercizio 1.11 (1) - Funzioni finanziarie nei 3 regimi finanziari >>>
Esercizio 1.11 (2) - Fattori di capitalizzazione (polinomiali) >>>
Esercizio 1.11 (3) - Acquisto progressivo di titoli >>>

1.12 Tassi equivalenti e tassi nominali

Considerati due tassi d'interesse (sconto) periodali, essi si definiscono equivalenti se comportano lo stesso valore delle funzioni finanziarie, con riguardo allo stesso intervallo temporale (ad esempio con riferimento allo stesso intervallo uniperiodale). Con riguardo, ad esempio, ai fattori di capitalizzazione e di attualizzazione, risulta

$$\boxed{cc}\quad \begin{cases} r=(1+i_{t_1})^{\frac{1}{t_1}}=(1+i_{t_2})^{\frac{1}{t_2}} \Rightarrow i_{t_1}=(1+i_{t_2})^{\frac{t_1}{t_2}}-1 \\ v=(1-d_{t_1})^{\frac{1}{t_1}}=(1-d_{t_2})^{\frac{1}{t_2}} \Rightarrow d_{t_1}=1-(1-d_{t_2})^{\frac{t_1}{t_2}} \end{cases}$$

$$\boxed{cs}\quad r=1+\frac{i_{t_1}}{t_1}=1+\frac{i_{t_2}}{t_2} \Rightarrow i_{t_1}=\frac{t_1}{t_2}\cdot i_{t_2}$$

$$\boxed{ch}\quad v=1-\frac{d_{t_1}}{t_1}=1-\frac{d_{t_2}}{t_2} \Rightarrow d_{t_1}=\frac{t_1}{t_2}\cdot d_{t_2}$$

Considerando, in particolare, tassi frazionati relativi a una frazione del periodo unitario

$$t_1=\frac{1}{m}\ ,\ t_2=\frac{1}{n} \Rightarrow \frac{1}{t_1}=m\ ,\ \frac{1}{t_2}=n$$

le condizioni precedenti risultano

$$\boxed{cc}\quad \begin{cases} r=(1+i_{\frac{1}{m}})^{m}=(1+i_{\frac{1}{n}})^{n} \Rightarrow i_{\frac{1}{m}}=(1+i_{\frac{1}{n}})^{\frac{n}{m}}-1 \\ v=(1-d_{\frac{1}{m}})^{m}=(1-d_{\frac{1}{n}})^{n} \Rightarrow d_{\frac{1}{m}}=1-(1-d_{\frac{1}{n}})^{\frac{n}{m}} \end{cases}$$

$$\boxed{cs}\quad r=1+m\,i_{\frac{1}{m}}=1+n\,i_{\frac{1}{n}} \Rightarrow i_{\frac{1}{m}}=\frac{n}{m}i_{\frac{1}{n}}$$

$$\boxed{ch}\quad v=1-m\,d_{\frac{1}{m}}=1-n\,d_{\frac{1}{n}} \Rightarrow d_{\frac{1}{m}}=\frac{n}{m}d_{\frac{1}{n}}$$

Ponendo, rispettivamente, m = 1 oppure n = 1, si ottengono, in particolare, le relazioni esistenti tra tassi uniperiodali e tassi frazionati e viceversa

$$\boxed{cc}\quad \begin{cases} r = 1 + i = (1 + i_{\frac{1}{n}})^n \Rightarrow i = (1 + i_{\frac{1}{n}})^n - 1 \\ v = 1 - d = (1 - d_{\frac{1}{n}})^n \Rightarrow d = 1 - (1 - d_{\frac{1}{n}})^n \end{cases}$$

$$\boxed{cs}\quad r = 1 + i = 1 + n\, i_{\frac{1}{n}} = \Rightarrow i = n\, i_{\frac{1}{n}}$$

$$\boxed{ch}\quad v = 1 - d = 1 - n\, d_{\frac{1}{n}} \Rightarrow d = n\, d_{\frac{1}{n}}$$

$$\boxed{cc}\quad \begin{cases} r = (1 + i_{\frac{1}{m}})^m = 1 + i \Rightarrow i_{\frac{1}{m}} = (1 + i)^{\frac{1}{m}} - 1 \\ v = (1 - d_{\frac{1}{m}})^m = 1 - d \Rightarrow d_{\frac{1}{m}} = 1 - (1 - d)^{\frac{1}{m}} \end{cases}$$

$$\boxed{cs}\quad r = 1 + m\, i_{\frac{1}{m}} = 1 + i \Rightarrow i_{\frac{1}{m}} = \frac{i}{m}$$

$$\boxed{ch}\quad v = 1 - m\, d_{\frac{1}{m}} = 1 - d \Rightarrow d_{\frac{1}{m}} = \frac{d}{m}$$

Nella pratica dei mercati finanziari, anziché considerare tassi effettivi relativi a 1/m del periodo unitario, è consuetudine utilizzare tassi nominali per un periodo unitario, rinnovabili (ossia convertibili) m volte nel periodo stesso

$$\boxed{cc}\quad \begin{cases} j_m = m\, i_{\frac{1}{m}} = m((1+i)^{\frac{1}{m}} - 1) \ , \quad j_1 = i \\ \rho_m = m\, d_{\frac{1}{m}} = m(1-(1-d)^{\frac{1}{m}}) \ , \ \rho_1 = d \end{cases}$$

$$\boxed{cs}\quad j_m = m\, i_{\frac{1}{m}} = m\frac{1}{m} i = i$$

$$\boxed{ch}\quad \rho_m = m\, d_{\frac{1}{m}} = m\frac{1}{m} d = d$$

essendo logicamente

$$\boxed{cc}\quad \begin{cases} i_{\frac{1}{m}} = \dfrac{j_m}{m} \ , \ i = \left(1+\dfrac{j_m}{m}\right)^m - 1 \ , \quad i = j_1 \\ d_{\frac{1}{m}} = \dfrac{\rho_m}{m} \ , \ d = 1-\left(1-\dfrac{\rho_m}{m}\right)^m \ , \ d = \rho_1 \end{cases}$$

$$\boxed{cs}\quad j_m = m\, i_{\frac{1}{m}} \ , \ i = m\frac{j_m}{m} = j_m$$

$$\boxed{ch}\quad \rho_m = m\, d_{\frac{1}{m}} \ , \ d = m\frac{\rho_m}{m} = \rho_m$$

Come si può notare dai risultati ottenuti, la definizione di tassi nominali risulta non significativa con riferimento ai regimi finanziari della capitalizzazione semplice e della capitalizzazione iperbolica, per cui le successive considerazioni saranno svolte con riguardo al solo regime finanziario della capitalizzazione (e attualizzazione) composta.

Poiché risulta

$$j_{-m} = -m((1+i)^{-\frac{1}{m}} - 1) = m(1-(1+i)^{-\frac{1}{m}}) = m(1-(1-d)^{\frac{1}{m}}) = \rho_m$$

lo studio della funzione del tasso nominale d'interesse j_m sarà effettuato, considerando il frazionamento m variabile nell'insieme dei numeri reali (a parte il valore m = 0 di non definizione della funzione stessa)

La funzione j_m è definita per $m \neq 0$, in particolare risulta

$$\boxed{\lim_{m\to 0^-} j_m = \lim_{m\to 0^-} m((1+i)^{\frac{1}{m}}-1)=0}$$

$$\boxed{\lim_{m\to 0+} j_m = \lim_{m\to 0+} m((1+i)^{\frac{1}{m}}-1)=+\infty}$$

$$\boxed{\lim_{m\to \pm\infty} j_m = \lim_{m\to \pm\infty} m((1+i)^{\frac{1}{m}}-1)=lg(1+i)=\delta}$$

infatti (applicando, ove necessario, il teorema di De L'Hopital)

$$\lim_{m\to 0^-} m((1+i)^{\frac{1}{m}}-1)=\lim_{w\to -\infty}\frac{(1+i)^w-1}{w}=\frac{0^+-1}{-\infty}=0^+$$

$$\lim_{m\to 0^+} m((1+i)^{\frac{1}{m}}-1)=\lim_{w\to +\infty}\frac{(1+i)^w-1}{w}=\frac{+\infty}{+\infty}$$

$$\lim_{w\to +\infty}\frac{((1+i)^w-1)'}{(w)'}=\lim_{w\to +\infty}\frac{(1+i)^w lg(1+i)}{1}=\frac{+\infty}{1}=+\infty$$

$$\lim_{m\to \pm\infty} m((1+i)^{\frac{1}{m}}-1)=\lim_{w\to 0}\frac{(1+i)^w-1}{w}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{w\to 0}\frac{((1+i)^w-1)'}{(w)'}=\lim_{w\to 0}\frac{(1+i)^w lg(1+i)}{1}=\delta$$

la quantità lg(1+i) è detta tasso nominale d'interesse rinnovabile di istante in istante ossia tasso istantaneo d'interesse; esso

coincide con la forza d'interesse (e il relativo rendimento a scadenza) costante, caratteristica del regime finanziario della capitalizzazione composta con tasso d'interesse costante

$$\boxed{\delta = lg(1+i) \;\Rightarrow\; 1+i = e^{\delta} \;,\; i = e^{\delta} - 1}$$

Calcolando le due prime derivate della funzione j_m

$$(j_m)' = (m((1+i)^{\frac{1}{m}} - 1))' =$$
$$= (1+i)^{\frac{1}{m}} - 1 + m(1+i)^{\frac{1}{m}}(-\frac{1}{m^2})\delta = (1+i)^{\frac{1}{m}}(1 - \frac{\delta}{m}) - 1$$

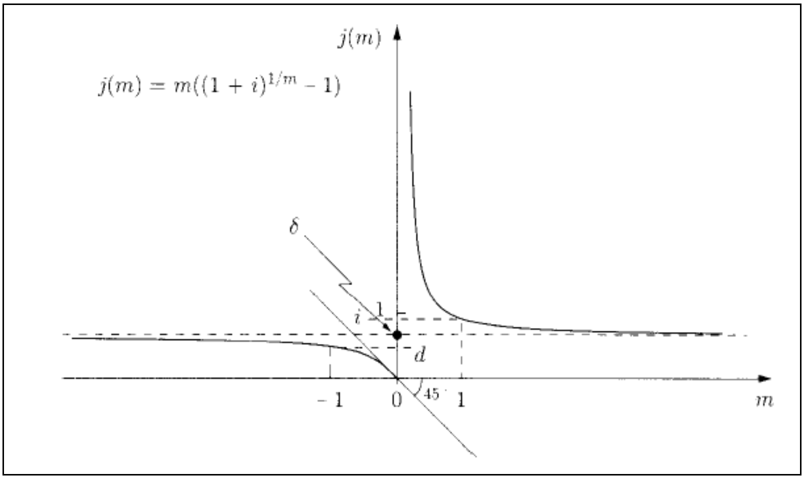
$$(j_m)'' = ((1+i)^{\frac{1}{m}}(1 - \frac{\delta}{m}) - 1)' =$$
$$= (1+i)^{\frac{1}{m}}(-\frac{1}{m^2})\,\delta(1 - \frac{\delta}{m}) + (1+i)^{\frac{1}{m}}\frac{\delta}{m^2} = (1+i)^{\frac{1}{m}}\frac{\delta^2}{m^3}$$

poiché

$$\boxed{\lim_{m \to 0^-} j'_m = -1} \quad \boxed{\lim_{m \to 0^+} j'_m = -\infty} \quad \boxed{\lim_{m \to \pm\infty} j'_m = 0}$$

$$\boxed{\underset{\neq 0}{j'_m} < 0} \quad \boxed{\underset{<0}{j''_m} < 0 \;,\; \underset{>0}{j''_m} > 0}$$

si può rilevare che la funzione j_m per m < 0 risulta decrescente e convessa, mentre per m > 0 risulta decrescente e concava



Dal punto di vista finanziario, le considerazioni relative al tasso nominale d'interesse vanno riferite alla funzione corrispondente ad m > 0, ossia al grafico presente nel primo quadrante.

Con ragionamento analogo a quello adottato per i tassi nominali d'interesse, si può svolgere la trattazione relativa ai tassi nominali di sconto e in base alla precedente relazione di corrispondenza analitica tra i due tassi è possibile derivare facilmente considerazioni analoghe a quelle precedenti

$$\boxed{\lim_{m\to 0^-}\rho_m = \lim_{m\to 0^+} j_m = +\infty} \qquad \boxed{\lim_{m\to 0^+}\rho_m = \lim_{m\to 0^-} j_m = 0}$$

$$\boxed{\lim_{m\to\pm\infty}\rho_m = \lim_{m\to\mp\infty} j_m = ln(1+i) = \delta = -lg(1-d)}$$

infatti (applicando il teorema di De L'Hopital)

$$\lim_{m\to\pm\infty} m(1-(1-d)^{\frac{1}{m}}) = \lim_{w\to 0}\frac{1-(1-d)^w}{w} = \frac{0}{0}$$

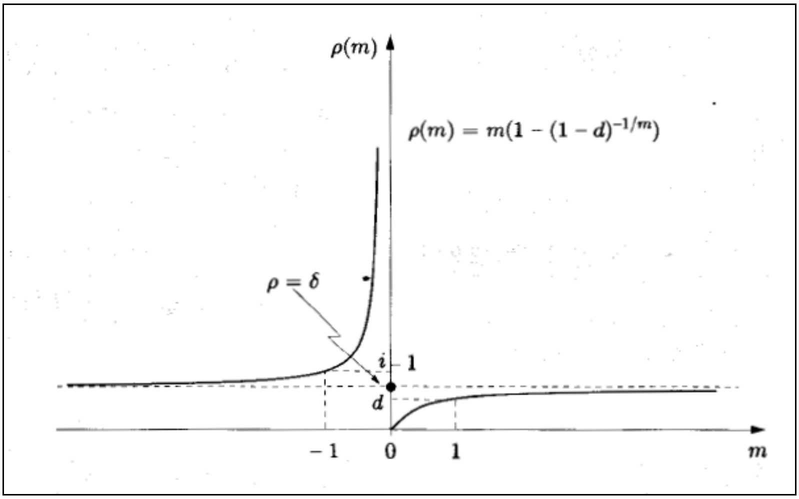
$$\lim_{w\to 0}\frac{(1-(1-d)^w)'}{(w)'} = \lim_{w\to 0}\frac{-(1-d)^w\, lg(1-d)}{1} = \delta$$

la quantità -lg(1-d) è detta tasso nominale di sconto rinnovabile di istante in istante ovvero tasso istantaneo di sconto; esso coincide con la forza di sconto costante, caratteristica del regime finanziario della attualizzazione composta con tasso di sconto costante

$$\boxed{\delta = -lg(1-d) \;\Rightarrow\; 1-d = e^{-\delta} \;,\; d = 1-e^{-\delta}}$$

Poiché i tassi istantanei d'interesse e di sconto coincidono ,in seguito potremo sempre parlare di intensità istantanea oppure usare l'una oppure l'altra denominazione indifferentemente.

Dalla specularità delle due funzioni j_m e ρ_m è facile ottenere il grafico della seconda funzione relativa al tasso nominale di sconto, la quale per m < 0 risulta crescente e concava e per m > 0 risulta crescente e convessa



Ovviamente, anche in questo caso, dal punto di vista finanziario, le considerazioni relative al tasso nominale di sconto vanno riferite alla funzione corrispondente ad m > 0, ossia al grafico presente nel primo quadrante.

Esercizio 1.12 (1) - Tassi nominali da tassi effettivi >>>

Lo schema generale delle relazioni esistenti fra le diverse funzioni finanziarie già introdotto in precedenza può essere integrato con le relazioni esistenti tra tassi effettivi e tassi nominali e intensità istantanea (d'interesse e di sconto), infatti, considerando

$$(1+i)\,(1-d)=1 \;\Rightarrow\; \left(1+\frac{j_m}{m}\right)^m \left(1-\frac{\rho_m}{m}\right)^m = 1 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; \left(1+\frac{j_m}{m}\right)\left(1-\frac{\rho_m}{m}\right)=1 \;\Rightarrow\; j_m-\rho_m=\frac{j_m\,\rho_m}{m}$$

$$j_m-\frac{j_m\,\rho_m}{m}=\rho_m \;\Rightarrow\; j_m=\frac{\rho_m}{1-\frac{\rho_m}{m}}=\frac{\rho_m}{1-d_{\frac{1}{m}}}=\frac{\rho_m}{(1-d)^{\frac{1}{m}}}=\rho_m(1+i)^{\frac{1}{m}}$$

$$\rho_m+\frac{j_m\,\rho_m}{m}=j_m \;\Rightarrow\; \rho_m=\frac{j_m}{1+\frac{j_m}{m}}=\frac{j_m}{1+i_{\frac{1}{m}}}=\frac{j_m}{(1+i)^{\frac{1}{m}}}=j_m(1-d)^{\frac{1}{m}}$$

risulta

	$\boxed{i}$	$\boxed{d}$	$\boxed{j_m}$	$\boxed{\rho_m}$	$\boxed{\delta}$
$\boxed{i} =$	...	$\dfrac{d}{1-d}$	$\left(1+\dfrac{j_m}{m}\right)^{m}-1$	$\left(1-\dfrac{\rho_m}{m}\right)^{-m}-1$	$e^{\delta}-1$
$\boxed{d} =$	$\dfrac{i}{1+i}$	...	$1-\left(1+\dfrac{j_m}{m}\right)^{-m}$	$1-\left(1-\dfrac{\rho_m}{m}\right)^{m}$	$1-e^{-\delta}$
$\boxed{j_m} =$	$m((1+i)^{\frac{1}{m}}-1)$	$m((1-d)^{-\frac{1}{m}}-1)$	...	$\dfrac{\rho_m}{1-\dfrac{\rho_m}{m}}$	$m(e^{\frac{\delta}{m}}-1)$
$\boxed{\rho_m} =$	$m(1-(1+i)^{-\frac{1}{m}})$	$m(1-(1-d)^{\frac{1}{m}})$	$\dfrac{j_m}{1+\dfrac{j_m}{m}}$	...	$m(1-e^{-\frac{\delta}{m}})$
$\boxed{\delta = h} =$	$lg(1+i)$	$-lg(1-d)$	$m\,lg\left(1+\dfrac{j_m}{m}\right)$	$-m\,lg\left(1-\dfrac{\rho_m}{m}\right)$	...

Considerando tassi nominali d'interesse e di sconto con diversa convertibilità

$$\boxed{i=\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{m}-1=\left(1+\frac{j_n}{n}\right)^{n}-1 \;\Rightarrow\; j_m=m\left(\left(1+\frac{j_n}{n}\right)^{\frac{n}{m}}-1\right)}$$

$$\boxed{d=1-\left(1-\frac{\rho_m}{m}\right)^{m}=1-\left(1-\frac{\rho_n}{n}\right)^{n} \;\Rightarrow\; \rho_m=m\left(1-\left(1-\frac{\rho_n}{n}\right)^{\frac{n}{m}}\right)}$$

è possibile costruire il seguente schema generale relativo anche ai tassi per periodi frazionati

	$\boxed{i_{\frac{1}{n}}}$	$\boxed{d_{\frac{1}{n}}}$	$\boxed{j_n}$	$\boxed{\rho_n}$
$\boxed{i_{\frac{1}{m}}} =$	$(1+i_{\frac{1}{n}})^{\frac{n}{m}}-1$	$(1-d_{\frac{1}{n}})^{-\frac{n}{m}}-1$	$(1+\frac{j_n}{n})^{\frac{n}{m}}-1$	$(1-\frac{\rho_n}{n})^{-\frac{n}{m}}-1$
$\boxed{d_{\frac{1}{m}}} =$	$1-(1+i_{\frac{1}{n}})^{-\frac{n}{m}}$	$1-(1-d_{\frac{1}{n}})^{\frac{n}{m}}$	$1-(1+\frac{j_n}{n})^{-\frac{n}{m}}$	$1-(1-\frac{\rho_n}{n})^{\frac{n}{m}}$
$\boxed{j_m} =$	$m((1+i_{\frac{1}{n}})^{\frac{n}{m}}-1)$	$m((1-d_{\frac{1}{n}})^{-\frac{n}{m}}-1)$	$m((1+\frac{j_n}{n})^{\frac{n}{m}}-1)$	$m((1-\frac{\rho_n}{n})^{-\frac{n}{m}}-1)$
$\boxed{\rho_m} =$	$m(1-(1+i_{\frac{1}{n}})^{-\frac{n}{m}})$	$m(1-(1-d_{\frac{1}{n}})^{\frac{n}{m}})$	$m(1-(1+\frac{j_n}{n})^{-\frac{n}{m}})$	$m(1-(1-\frac{\rho_n}{n})^{\frac{n}{m}})$

dal quale è possibile trarre le diverse formule viste in precedenza, ponendo alternativamente

- ***$m = 1$***
- ***$n = 1$***
- ***$m \to +\infty$ (con n qualsiasi oppure = 1)***
- ***$n \to +\infty$ (con m qualsiasi oppure = 1)***

Esercizio 1.12 (2) - Tassi nominali da tassi nominali >>>

Con riferimento alle varie tipologie di tassi esaminate è possibile considerare formule approssimate, facendo riferimento ad opportuni sviluppi delle funzioni finanziarie in base alle formule di Mac Laurin:

- ***Tasso nominale d'interesse in funzione del tasso effettivo d'interesse***

$$j_m = m\left((1+i)^{\frac{1}{m}} - 1\right) = m\left(\sum_{k=0}^{\infty}\binom{1\div m}{k} i^k - 1\right) = m\sum_{k=1}^{\infty}\binom{1\div m}{k} i^k$$

$$= m\left(\binom{1\div m}{1} i + \binom{1\div m}{2} i^2 + \binom{1\div m}{3} i^3 + \binom{1\div m}{4} i^4 + \ldots\right)$$

$$= i - \frac{m-1}{2m} i^2 + \frac{(m-1)(2m-1)}{6m^2} i^3 - \frac{(m-1)(2m-1)(3m-1)}{24m^3} i^4 + \ldots$$

$$= i\left(1 - \frac{m-1}{2m} i\left(1 - \frac{2m-1}{3m} i\left(1 - \frac{3m-1}{4m} i(1-\ldots)\right)\right)\right)$$

Nota: i coefficienti binomiali considerati nel precedente sviluppo costituiscono una generalizzazione nel campo dei numeri razionali dei tradizionali coefficienti definiti normalmente nell'insieme dei numeri naturali

- ***Tasso effettivo d'interesse in funzione del tasso nominale d'interesse***

$$i = \left(1 + \frac{j_m}{m}\right)^m - 1 = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{m}{k}\left(\frac{j_m}{m}\right)^k - 1 = \sum_{k=1}^{\infty}\binom{m}{k}\left(\frac{j_m}{m}\right)^k$$

$$= \binom{m}{1}\left(\frac{j_m}{m}\right) + \binom{m}{2}\left(\frac{j_m}{m}\right)^2 + \binom{m}{3}\left(\frac{j_m}{m}\right)^3 + \binom{m}{4}\left(\frac{j_m}{m}\right)^4 + \ldots$$

$$= j_m + \frac{m-1}{2m} j_m^2 + \frac{(m-1)(m-2)}{6m^2} j_m^3 + \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{24m^3} j_m^4 + \ldots$$

$$= j_m\left(1 + \frac{m-1}{2m} j_m\left(1 + \frac{m-2}{3m} j_m\left(1 + \frac{m-3}{4m} j_m(1+\ldots)\right)\right)\right)$$

Limitando gli sviluppi sino al secondo termine, si ottengono le seguenti formule approssimate

$$\boxed{j_m = m\left((1+i)^{\frac{1}{m}} - 1\right) \simeq i - \frac{m-1}{2m} i^2 = i\left(1 - \frac{m-1}{2m} i\right) = \hat{j}_m} \qquad \boxed{\hat{j}_1 = i}$$

$$i = \left(1 + \frac{j_m}{m}\right)^m - 1 \simeq j_m + \frac{m-1}{2m} j_m^2 = j_m \left(1 + \frac{m-1}{2m} j_m\right)$$

La funzione $\hat{j}_m$ è definita per $m \neq 0$ ed operativamente per $m > 0$ e in particolare risulta

$$\delta = \ln(1+i) = \lim_{m \to +\infty} j_m \simeq \lim_{m \to +\infty} \hat{j}_m = \lim_{m \to +\infty} i\left(1 - \frac{m-1}{2m} i\right) = i\left(1 - \frac{i}{2}\right)$$

infatti, considerando il seguente sviluppo secondo la formula di Mac Laurin, risulta

$$\delta = \ln(1+i) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-i)^k}{k} = i - \frac{i^2}{2} + \frac{i^3}{3} - \frac{i^4}{4} + \ldots \simeq i - \frac{i^2}{2} = i\left(1 - \frac{i}{2}\right)$$

Calcolando le due prime derivate

$$(\hat{j}_m)' = (i(1 - \frac{m-1}{2m} i))' = \frac{i(-(2m - 2(m-1)))i}{4m^2} = -\frac{i^2}{2m^2}$$

$$(j_m)'' = (-\frac{i^2}{2m^2})' = -(-\frac{4mi^2}{4m^4}) = \frac{i^2}{m^3}$$

poiché

$$\lim_{m \to 0^+} \hat{j}_m = \lim_{m \to 0^+} i\left(1 - \frac{m-1}{2m} i\right) = +\infty$$

$$\lim_{m \to +\infty} \hat{j}_m = \lim_{m \to +\infty} i\left(1 - \frac{m-1}{2m} i\right) = i\left(1 - \frac{i}{2}\right)$$

$\boxed{\lim_{m\to 0^+} \hat{j}'_m = -\infty}$ $\boxed{\lim_{m\to+\infty} \hat{j}'_m = 0}$ $\boxed{\hat{j}'_{m} < 0 \atop {>0}}$ $\boxed{\hat{j}''_{m} > 0 \atop {>0}}$

la funzione $\hat{j}_m$ presenta per m > 0 un andamento abbastanza simile a quello visto per la funzione j_m.

Risulta infine

$$\boxed{i \simeq \lim_{m\to+\infty} \hat{j}_m = \lim_{m\to+\infty}\left(j_m + \frac{m-1}{2m} j_m^2\right) = \delta + \frac{\delta^2}{2} = \delta\left(1+\frac{\delta}{2}\right)}$$

infatti, considerando il seguente sviluppo secondo la formula di Mac Laurin, risulta

$$\boxed{i = e^{\delta} - 1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta^k}{k!} = \frac{\delta}{1!} + \frac{\delta^2}{2!} + \frac{\delta^3}{3!} + \frac{\delta^4}{4!} + \ldots \simeq \delta + \frac{\delta^2}{2} = \delta\left(1+\frac{\delta}{2}\right)}$$

Operando in modo analogo relativamente ai tassi nominale ed effettivo di sconto, si ottengono le seguenti formule approssimate

$$\boxed{\rho_m = m\left(1-(1-d)^{\frac{1}{m}}\right) \simeq d + \frac{m-1}{2m} d^2 = d\left(1 + \frac{m-1}{2m} d\right) = \hat{\rho}_m} \qquad \boxed{\hat{\rho}_1 = d}$$

$$\boxed{d = 1 - \left(1 - \frac{\rho_m}{m}\right)^m \simeq \rho_m - \frac{m-1}{2m}\rho_m^2 = \rho_m\left(1 - \frac{m-1}{2m}\rho_m\right)}$$

La funzione $\hat{\rho}_m$ è definita per $m \neq 0$ ed operativamente per m > 0 e in particolare risulta

$$\boxed{\delta = -\lg(1-d) = \lim_{m\to+\infty} \rho_m \simeq \lim_{m\to+\infty} \hat{\rho}_m = \lim_{m\to+\infty} d\left(1 + \frac{m-1}{2m} d\right) = d\left(1+\frac{d}{2}\right)}$$

infatti, considerando il seguente sviluppo secondo la formula di Mac Laurin, risulta

$$\delta = -lg(1-d) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d^k}{k} = d + \frac{d^2}{2} + \frac{d^3}{3} + \frac{d^4}{4} + \ldots \simeq d + \frac{d^2}{2} = d\left(1 + \frac{d}{2}\right)$$

Calcolando le due prime derivate

$$(\hat{\rho}_m)' = (d(1 + \frac{m-1}{2m} d))' = \frac{d(2m-2(m-1))i}{4m^2} = \frac{d^2}{2m^2}$$

$$(\hat{\rho}_m)'' = (\frac{d^2}{2m^2})' = -\frac{4md^2}{4m^4} = -\frac{d^2}{m^3}$$

Poiché

$$\lim_{m \to 0^+} \hat{\rho}_m = \lim_{m \to 0^+} d\left(1 + \frac{m-1}{2m} d\right) = -\infty$$

$$\lim_{m \to +\infty} \hat{\rho}_m = \lim_{m \to +\infty} d\left(1 + \frac{m-1}{2m} d\right) = d\left(1 + \frac{d}{2}\right)$$

$$\lim_{m \to 0^+} \hat{\rho}'_m = +\infty \qquad \lim_{m \to +\infty} \hat{\rho}'_m = 0 \qquad \underset{>0}{\hat{\rho}'_m} > 0 \qquad \underset{>0}{\hat{\rho}''_m} < 0$$

la funzione $\hat{\rho}_m$ presenta per m > 0 un andamento abbastanza simile a quello visto per la funzione ρ_m.

Risulta infine

$$d \simeq \lim_{m \to +\infty} \hat{\rho}_m = \lim_{m \to +\infty} \left(\rho_m - \frac{m-1}{2m} \rho_m^2\right) = \delta - \frac{\delta^2}{2} = \delta\left(1 - \frac{\delta}{2}\right)$$

infatti, considerando il seguente sviluppo secondo la formula di Mac Laurin, risulta

$$d = 1 - e^{-\delta} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-\delta)^k}{k!} = \frac{\delta}{1!} - \frac{\delta^2}{2!} + \frac{\delta^3}{3!} - \frac{\delta^4}{4!} + \ldots \simeq \delta - \frac{\delta^2}{2} = \delta\left(1 - \frac{\delta}{2}\right)$$

Esercizio 1.12 (3) - Tassi nominali (appross.) da tassi effettivi >>>

Riepilogando i risultati precedenti ed integrandoli con le relazioni esistenti tra tassi nominali equivalenti d'interesse e di sconto e intensità istantanea, si ottiene il seguente schema relativo a valutazioni di tipo approssimato:

	$\boxed{i}$	$\boxed{d}$	$\boxed{j_m}$	$\boxed{\rho_m}$	$\boxed{\delta}$
$\boxed{i} \simeq$	...	$d(1+d)$	$j_m\left(1+\frac{m-1}{2m}j_m\right)$	$\rho_m\left(1+\frac{m+1}{2m}\rho_m\right)$	$\delta\left(1+\frac{\delta}{2}\right)$
$\boxed{d} \simeq$	$i(1-i)$	...	$j_m\left(1-\frac{m+1}{2m}j_m\right)$	$\rho_m\left(1-\frac{m-1}{2m}\rho_m\right)$	$\delta\left(1-\frac{\delta}{2}\right)$
$\boxed{j_m} \simeq$	$i\left(1-\frac{m-1}{2m}i\right)$	$d\left(1+\frac{m+1}{2m}d\right)$	...	$\rho_m\left(1+\frac{\rho_m}{m}\right)$	$\delta\left(1+\frac{\delta}{2m}\right)$
$\boxed{\rho_m} \simeq$	$i\left(1-\frac{m+1}{2m}i\right)$	$d\left(1+\frac{m-1}{2m}d\right)$	$j_m\left(1-\frac{j_m}{m}\right)$	...	$\delta\left(1-\frac{\delta}{2m}\right)$
$\boxed{\delta = h} \simeq$	$i\left(1-\frac{i}{2}\right)$	$d\left(1+\frac{d}{2}\right)$	$j_m\left(1-\frac{j_m}{2m}\right)$	$\rho_m\left(1+\frac{\rho_m}{2m}\right)$	...

Considerando tassi nominali (approssimati) d'interesse e di sconto con diversa convertibilità, risulta

$$j_m = m\left(\left(1+\frac{j_n}{n}\right)^{\frac{n}{m}} - 1\right) \simeq j_n - \frac{m-n}{2mn} j_n^2 = j_n\left(1 - \frac{m-n}{2mn} j_n\right)$$

$$\rho_m = m\left(1-\left(1-\frac{\rho_n}{n}\right)^{\frac{n}{m}}\right) \simeq \rho_n + \frac{m-n}{2mn}\rho_n^2 = \rho_n\left(1+\frac{m-n}{2mn}\rho_n\right)$$

è possibile costruire il seguente schema

	$\boxed{j_n}$	$\boxed{\rho_n}$
$\boxed{j_m \simeq}$	$j_n\left(1-\frac{m-n}{2mn}j_n\right)$	$\rho_n\left(1+\frac{m+n}{2mn}\rho_n\right)$
$\boxed{\rho_m \simeq}$	$j_n\left(1-\frac{m+n}{2mn}j_n\right)$	$\rho_n\left(1+\frac{m-n}{2mn}\rho_n\right)$

dal quale è possibile trarre le diverse formule viste in precedenza, ponendo alternativamente

- ***$m = 1$***
- ***$n = 1$***
- ***$m \to +\infty$ (con n qualsiasi oppure = 1)***
- ***$n \to +\infty$ (con m qualsiasi oppure = 1)***

Esercizio 1.12 (4) - Tassi nominali (appross.) da tassi nominali >>>

Lo schema generale delle relazioni esistenti tra le diverse funzioni finanziarie e i diversi tassi d'interesse (e di sconto) uniperiodali, nominali e istantanei nel caso del regime finanziario dell'interesse (e dello sconto) composto con tasso d'interesse (e di sconto) effettivo costante risulta

	$\boxed{i}$	$\boxed{d}$	$\boxed{j_m}$	$\boxed{\rho_m}$	$\boxed{\delta}$
$\boxed{r_t} =$	$(1+i)^t$	$(1-d)^{-t}$	$(1+\frac{j_m}{m})^{mt}$	$(1-\frac{\rho_m}{m})^{-mt}$	$e^{\delta t}$
$\boxed{v_t} =$	$(1+i)^{-t}$	$(1-d)^t$	$(1+\frac{j_m}{m})^{-mt}$	$(1-\frac{\rho_m}{m})^{mt}$	$e^{-\delta t}$
$\boxed{i_t} =$	$(1+i)^t-1$	$(1-d)^{-t}-1$	$(1+\frac{j_m}{m})^{mt}-1$	$(1-\frac{\rho_m}{m})^{-mt}-1$	$e^{\delta t}-1$
$\boxed{d_t} =$	$1-(1+i)^{-t}$	$1-(1-d)^t$	$1-(1+\frac{j_m}{m})^{-mt}$	$1-(1-\frac{\rho_m}{m})^{mt}$	$1-e^{-\delta t}$

e analogamente, lo schema generale delle relazioni esistenti tra i diversi tassi d'interesse (e di sconto) uniperiodali, nominali e istantanei e le diverse funzioni finanziarie, sempre nel caso del regime finanziario dell'interesse (e dello sconto) composto con tasso d'interesse (e di sconto) effettivo costante risulta

	$\boxed{r_t}$	$\boxed{v_t}$	$\boxed{i_t}$	$\boxed{d_t}$
$\boxed{i} =$	$r_t^{\frac{1}{t}}-1$	$v_t^{-\frac{1}{t}}-1$	$(1+i_t)^{\frac{1}{t}}-1$	$(1-d_t)^{-\frac{1}{t}}-1$
$\boxed{d} =$	$1-r_t^{-\frac{1}{t}}$	$1-v_t^{\frac{1}{t}}$	$1-(1+i_t)^{-\frac{1}{t}}$	$1-(1-d_t)^{\frac{1}{t}}$
$\boxed{j_m} =$	$m(r_t^{\frac{1}{mt}}-1)$	$m(v_t^{-\frac{1}{mt}}-1)$	$m((1+i_t)^{\frac{1}{mt}}-1)$	$m((1-d_t)^{-\frac{1}{mt}}-1)$
$\boxed{\rho_m} =$	$m(1-r_t^{-\frac{1}{mt}})$	$m(1-v_t^{\frac{1}{mt}})$	$m(1-(1+i_t)^{-\frac{1}{mt}})$	$m(1-(1-d_t)^{-\frac{1}{mt}})$
$\boxed{\delta = h} =$	$\frac{lg\, r_t}{t}$	$-\frac{lg\, v_t}{t}$	$\frac{lg(1+i_t)}{t}$	$-\frac{lg(1-d_t)}{t}$

Con riguardo a problemi relativi a importi non unitari, risultano immediatamente le seguenti relazioni, tramite le quali è possibile ricavare una delle grandezze finanziarie in funzione delle altre

$$\boxed{M_t = P_0(1+\frac{j_m}{m})^{mt} = P_0(1-\frac{\rho_m}{m})^{-mt} = P_0\, e^{\delta t}}$$

$$P_0 = M_t\left(1-\frac{\rho_m}{m}\right)^{tm} = M_t\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{-mt} = M_t\, e^{-\delta t}$$

$$I_t = P_0\left(\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{mt}-1\right) = P_0\left(\left(1-\frac{\rho_m}{m}\right)^{-mt}-1\right) = P_0\left(e^{\delta t}-1\right)$$

$$D_t = M_t\left(1-\left(1-\frac{\rho_m}{m}\right)^{mt}\right) = M_t\left(1-\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{-mt}\right) = M_t\left(1-e^{-\delta t}\right)$$

$$j_m = m\left(e^{\frac{\delta}{m}}-1\right) = m\left(\left(\frac{M_t}{P_0}\right)^{\frac{1}{mt}}-1\right) = m\left(r_t^{\frac{1}{mt}}-1\right)$$

$$\rho_m = m\left(1-e^{-\frac{\delta}{m}}\right) = m\left(1-\left(\frac{P_0}{M_t}\right)^{\frac{1}{mt}}\right) = m\left(1-v_t^{\frac{1}{mt}}\right)$$

$$\delta = lg\left(\frac{M_t}{P_0}\right)^{\frac{1}{t}} = \frac{lg\,M_t - lg\,P_0}{t} = lg\,r_t^{\frac{1}{t}} = \frac{lg\,r_t}{t} = -lg\,v_t^{\frac{1}{t}} = -\frac{lg\,v_t}{t}$$

$$t = \frac{lg\,M_t - lg\,P_0}{m\,lg\left(1+\frac{j_m}{m}\right)} = \frac{lg\,M_t - lg\,P_0}{-m\,lg\left(1-\frac{\rho_m}{m}\right)} = \frac{lg\,M_t - lg\,P_0}{\delta} = \frac{lg\,r_t}{\delta} = -\frac{lg\,v_t}{\delta}$$

Esercizio 1.12 (5) - Calcolo di montanti >>>
Esercizio 1.12 (6) - Calcolo di valori attuali >>>
Esercizio 1.12 (7) - Calcolo di tassi di interesse e di sconto >>>
Esercizio 1.12 (8) - Calcolo del tempo >>>
Esercizio 1.12 (9) - Calcolo di capitali impiegati >>>

Esercizi svolti in Excel Microsoft

Bill Gates nel 2007

***William (Bill) Henry Gates III** (Seattle 1955), è un imprenditore, informatico statunitense, è il fondatore e presidente di Microsoft Corporation. Nel 1968 Gates (e i suoi compagni di scuola) ha accesso per la prima volta ad un computer (un DEC PDP-11) e alla fine dello stesso anno, insieme a Paul Allen, fonda la Lakeside Programmers Group e successivamente, nel 1972, Traf-O-Data, per la progettazione di un computer per la misurazione del traffico stradale. Nel 1973, Bill Gates si iscrive alla Harvard University prima in legge e poi in matematica, nel 1974 trova lavoro alla Honeywell e successivamente, nel 1975, insieme ad Allen fonda una società di software (la Microsoft Corporation), che nel 1979 trova la sua sistemazione, con i suoi 16 dipendenti a Seattle. L'attività allo sviluppo porta alla creazione del foglio di calcolo elettronico Multiplan per Apple II e, nel 1982, di un sistema operativo CP/M (poi evolutosi in MS-DOS) e, successivamente, di Microsoft Word nel 1983 e di Microsoft Excel nel 1985. Fin dal 1983 la Microsoft un'interfaccia grafica, funzionante dapprima sul sistema operativo MS-DOS, e poi sviluppata nel 1985 per Windows 1.0, fino alla versione Windows 3.1 nel 1992. Successivamente nel 1995 la Microsoft introduce Windows 95, che è il primo sistema*

operativo grafico per azienda. Dal 1985 al 1991 Microsoft e IBM collaborano per la generazione di sistemi operativi, ma nel 1991 Gates decide di modificare il nome del proprio OS/2 in Windows NT. Nel 1992, Gates viene premiato con la Medaglia Nazionale per la Tecnologia dal Presidente degli Stati Uniti, George H.W. Bush. Da quel momento La Microsoft si espande sempre più e produce sempre nuove e più potenti edizioni del sistema operativo Windows e del pacchetto integrato di produttività individuale Office. Nel 2008, dopo trentatré anni di attività operativa, Bill Gates dà ufficialmente le dimissioni da presidente della Microsoft Corporation, lasciando il suo posto a Steve Ballmer, suo braccio destro da ormai più di due anni. Da allora, Gates si dedica a tempo pieno alla sua Foundation e alla ricerca di nuovi software, per una maggior semplicità di utilizzo da parte degli utenti.

Esercizio 1.4 (1) - Funzioni finanziarie

$$\left.\begin{matrix} P_x \\ M_y \end{matrix}\right\} \Rightarrow r_{x,y} = \frac{M_y}{P_x} \;,\; v_{x,y} = \frac{P_x}{M_y} \;,\; i_{x,y} = \begin{cases} r_{x,y} - 1 \\ d_{x,y} \cdot r_{x,y} \end{cases} \;,\; d_{x,y} = \begin{cases} 1 - v_{x,y} \\ i_{x,y} \cdot v_{x,y} \end{cases}$$

$$i_{x,y} - d_{x,y} = i_{x,y} \cdot d_{x,y}$$

	A	B	C	D	E
1	x	3	.		
2	y	8		y-x	5
3	P_x	800		$I_{x,y} = M_y - P_x$	200
4	M_y	1000		$D_{x,y} = M_y - P_x$	200
5					
6	$r_{x,y} = M_y/P_x$	1.2500			
7	$v_{x,y} = P_x/M_y$	0.8000			
8	$i_{x,y} = r_{x,y}-1$	25.00%		$i_{x,y} = d_{x,y}\, r_{x,y}$	25.00%
9	$d_{x,y} = 1-v_{x,y}$	20.00%		$d_{x,y} = i_{x,y}\, v_{x,y}$	20.00%
10				$i_{x,y}-d_{x,y} = i_{x,y}\, d_{x,y}$	5.00%

	A	B	C	D	E
1	x	3	.		
2	y	8		y-x	=B2-B1
3	P_x	800		$I_{x,y} = M_y$-P_x	=B4-B3
4	M_y	1000		$D_{x,y} = M_y$-P_x	=B4-B3
5					
6	$r_{x,y} = M_y/P_x$	=B4/B3			
7	$v_{x,y} = P_x/M_y$	=B3/B4			
8	$i_{x,y} = r_{x,y}$-1	=B6-1		$i_{x,y} = d_{x,y}\ r_{x,y}$	=B9*B6
9	$d_{x,y} = 1$-$v_{x,y}$	=1-B7		$d_{x,y} = i_{x,y}\ v_{x,y}$	=B8*B7
10				$i_{x,y}$-$d_{x,y} = i_{x,y}\ d_{x,y}$	=B8*B9

Esercizio 1.4 (2) - Schema generale delle funzioni finanziarie

$$r_{x,y} = \frac{1}{v_{x,y}} = 1 + i_{x,y} = \frac{1}{1 - d_{x,y}}$$

$$v_{x,y} = \frac{1}{r_{x,y}} = \frac{1}{1 + i_{x,y}} = 1 - d_{x,y}$$

$$i_{x,y} = r_{x,y} - 1 = \frac{1 - v_{x,y}}{v_{x,y}} = \frac{d_{x,y}}{1 - d_{x,y}}$$

$$d_{x,y} = \frac{r_{x,y} - 1}{r_{x,y}} = 1 - v_{x,y} = \frac{i_{x,y}}{1 + i_{x,y}}$$

	G	H	I	J	K
1		$r_{x,y}$	$v_{x,y}$	$i_{x,y}$	$d_{x,y}$
2		1.0400	0.9524	0.0600	0.0654
3	$r_{x,y}$		1.0500	1.0600	1.0700
4	$v_{x,y}$	0.9615		0.9434	0.9346
5	$i_{x,y}$	0.0400	0.0500		0.0700
6	$d_{x,y}$	0.0385	0.0476	0.0566	

	G	H	I	J	K
1		$r_{x,y}$	$v_{x,y}$	$i_{x,y}$	$d_{x,y}$
2		1.04	0.9524	0.06	0.0654
3	$r_{x,y}$		=1/I2	=1+J2	=1/(1-K2)
4	$v_{x,y}$	=1/H2		=1/(1+J2)	=1-K2
5	$i_{x,y}$	=H2-1	=(1-I2)/I2		=K2/(1-K2)
6	$d_{x,y}$	=(H2-1)/H2	=1-I2	=J2/(1+J2)	

Esercizio 1.7 (1) - Grandezze finanziarie uniperiodali

$$r = \frac{1}{v} = 1 + i = \frac{1}{1-d} = e^{\delta}$$

$$v = \frac{1}{r} = \frac{1}{1+i} = 1 - d = e^{-\delta}$$

$$i = r - 1 = \frac{1-v}{v} = \frac{d}{1-d} = e^{\delta} - 1$$

$$d = \frac{r-1}{r} = 1 - v = \frac{1}{1+i} = 1 - e^{-\delta}$$

$$\delta = lg\, r = -lg\, v = lg(1+i) = -lg(1-d)$$

	H	I	J	K	L	M
1		r	v	i	d	δ
2		1.08000	0.92593	0.08000	0.07407	0.07696
3	r		1.08000	1.08000	1.08000	1.08000
4	v	0.92593		0.92593	0.92593	0.92593
5	i	0.08000	0.08000		0.08000	0.08000
6	d	0.07407	0.07407	0.07407		0.07407
7	δ	0.07696	0.07696	0.07696	0.07696	

	H	I	J	K	L	M
1		r	v	i	d	δ
2		1.08	=1/I2	=I2-1	=1-J2	=LN(I2)
3	r		=1/J2	=1+K2	=1/(1-L2)	=EXP(M2)
4	v	=1/I2		=1/(1+K2)	=1-L2	=EXP(-M2)
5	i	=I2-1	=(1-J2)/J2		=L2/(1-L2)	=EXP(M2)-1
6	d	=(I2-1)/I2	=1-J2	=K2/(1+K2)		=1-EXP(-M2)
7	δ	=LN(I2)	=-LN(J2)	=LN(1+K2)	=-LN(1-L2)	

Esercizio 1.7 (2) - Approssimazione di grandezze finanziarie

$$\delta(i) = lg(1+i) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{i^k}{k} = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-i)^k}{k} = i - \frac{i^2}{2} + \frac{i^3}{3} - \frac{i^4}{4} + \dots \quad , \quad i \in (-1,1]$$

$$\delta(d) = -lg(1-d) = -\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{(-d)^k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{d^k}{k} = d + \frac{d^2}{2} + \frac{d^3}{3} + \dots \quad , \quad d \in [-1,1)$$

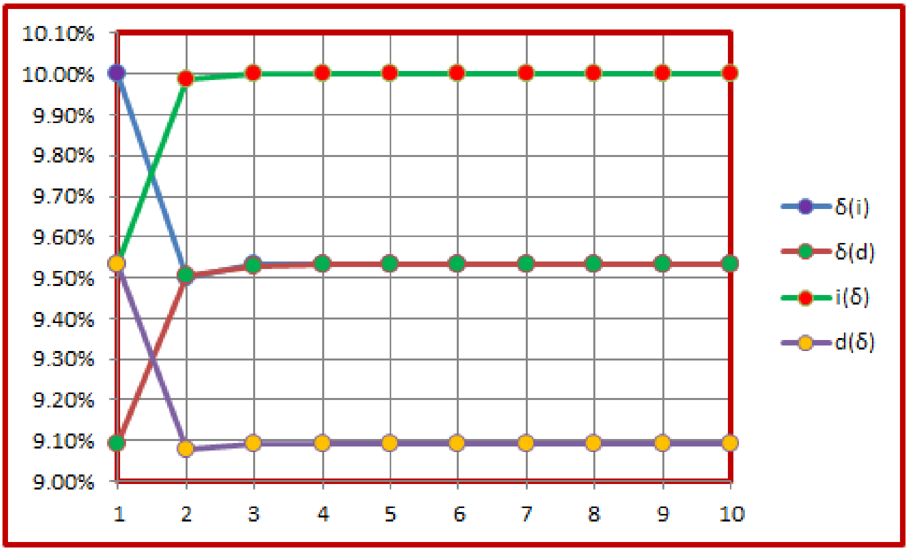
$$i(\delta) = e^{\delta} - 1 = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\delta^k}{k!} - 1 = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\delta^k}{k!} = \delta + \frac{\delta^2}{2!} + \frac{\delta^3}{3!} + \frac{\delta^4}{4!} + \dots \quad , \quad \delta \in (-\infty,+\infty)$$

$$d(\delta) = 1 - e^{-\delta} = 1 - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\delta)^k}{k!} = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-\delta)^k}{k!} = \delta - \frac{\delta^2}{2!} + \frac{\delta^3}{3!} - \frac{\delta^4}{4!} + \dots \quad , \quad \delta \in (-\infty,+\infty)$$

	A	B	C	D	E	F
1	*i*	10.000000%	.			
2	*d*	9.090909%				
3	δ	9.531018%				
4	δ	9.531018%				
5						
6	*k*	δ(*i*)	δ(*d*)	*i*(δ)	*d*(δ)	*k*!
7	1	10.000000%	9.090909%	9.531018%	9.531018%	1
8	2	9.500000%	9.504132%	9.985219%	9.076816%	2
9	3	9.533333%	9.529176%	9.999650%	9.091246%	6
10	4	9.530833%	9.530884%	9.999993%	9.090903%	24
11	5	9.531033%	9.531008%	10.000000%	9.090909%	120
12	6	9.531017%	9.531017%	10.000000%	9.090909%	720
13	7	9.531018%	9.531018%	10.000000%	9.090909%	5040
14	8	9.531018%	9.531018%	10.000000%	9.090909%	40320
15	9	9.531018%	9.531018%	10.000000%	9.090909%	362880
16	10	9.531018%	9.531018%	10.000000%	9.090909%	3628800

	A	B	C
1	*i*	0.1	.
2	*d*	=B1/(1+B1)	
3	δ	=LN(1+B1)	
4	δ	=-LN(1-B2)	
5			
6	*k*	δ(*i*)	δ(*d*)
7	1	=B1	=B2
8	2	=B7-(-B$1)^A8/A8	=C7+B$2^A8/A8
9	3	=B8-(-B$1)^A9/A9	=C8+B$2^A9/A9
10	4	=B9-(-B$1)^A10/A10	=C9+B$2^A10/A10

	D	E	F
6	*i*(δ)	*d*(δ)	*k*!
7	=B3	=B4	=A7
8	=D7+B$3^A8/F8	=E7-(-B$4)^A8/F8	=F7*A8
9	=D8+B$3^A9/F9	=E8-(-B$4)^A9/F9	=F8*A9
10	=D9+B$3^A10/F10	=E9-(-B$4)^A10/F10	=F9*A10

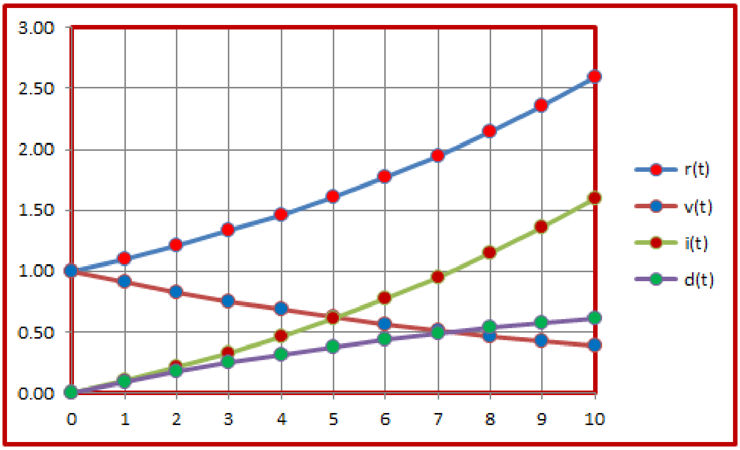


Esercizio 1.8 (1) - Funzioni finanziarie al variare della durata

$$\prod_{t=0}^{10}\left(r_t=(1+i)^t\ ,v_t=(1-d)^t\ ,i_t=r_t-1\ ,d_t=1-v_t\right)$$

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	*i*	*10.0000%*	.	*t*	r_t	v_t	i_t	d_t
2	*d*	*9.0909%*		*0*	*1.0000*	*1.0000*	*0.0000*	*0.0000*
3	*r*	*1.1000*		*1*	*1.1000*	*0.9091*	*0.1000*	*0.0909*
4	*v*	*0.9091*		*2*	*1.2100*	*0.8264*	*0.2100*	*0.1736*
5	*δ*	*9.5310%*		*3*	*1.3310*	*0.7513*	*0.3310*	*0.2487*
6				*4*	*1.4641*	*0.6830*	*0.4641*	*0.3170*
7				*5*	*1.6105*	*0.6209*	*0.6105*	*0.3791*
8				*6*	*1.7716*	*0.5645*	*0.7716*	*0.4355*
9				*7*	*1.9487*	*0.5132*	*0.9487*	*0.4868*
10				*8*	*2.1436*	*0.4665*	*1.1436*	*0.5335*
11				*9*	*2.3579*	*0.4241*	*1.3579*	*0.5759*
12				*10*	*2.5937*	*0.3855*	*1.5937*	*0.6145*
13								
14				*100*	*13780.6123*	*0.0001*	*13779.6123*	*0.9999*

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	i	0.1	.	t	r_t	v_t	i_t	d_t
2	d	=B1/(1+B1)		0	=(1+B$1)^D2	=(1-B$2)^D2	=E2-1	=1-F2
3	r	=1+B1		1	=(1+B$1)^D3	=(1-B$2)^D3	=E3-1	=1-F3
4	v	=1-B2		2	=(1+B$1)^D4	=(1-B$2)^D4	=E4-1	=1-F4
5	δ	=LN(1+B1)		3	=(1+B$1)^D5	=(1-B$2)^D5	=E5-1	=1-F5

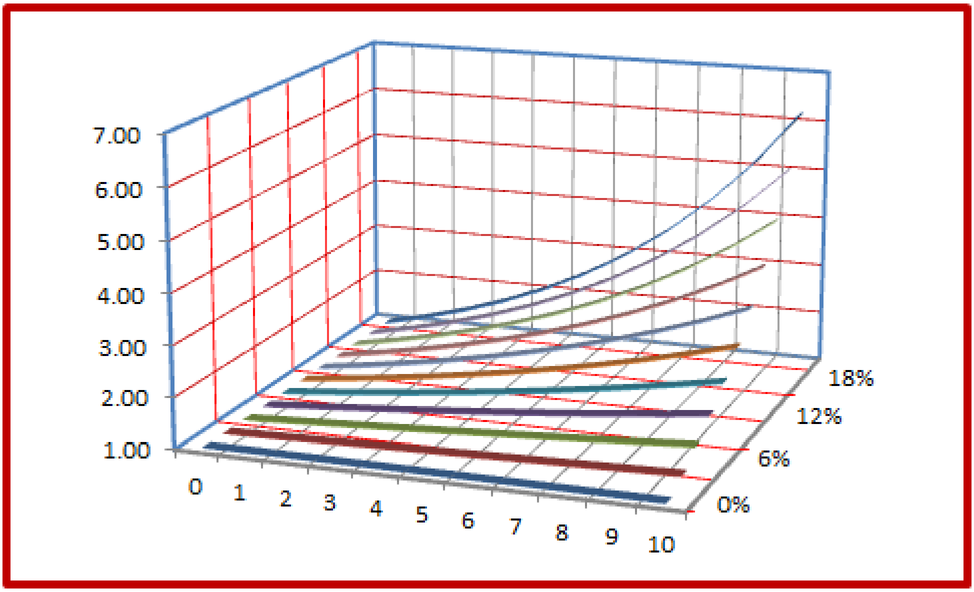


$$\mathop{\square}_{t=0}^{10}\ \mathop{\square}_{i=0\%\ (2\%)}^{20\%}\ r_t(i)=(1+i)^t$$

$$\mathop{\square}_{t=0}^{10}\ \mathop{\square}_{i=0\%\ (2\%)}^{20\%}\ v_t(i)=(1+i)^{-t}$$

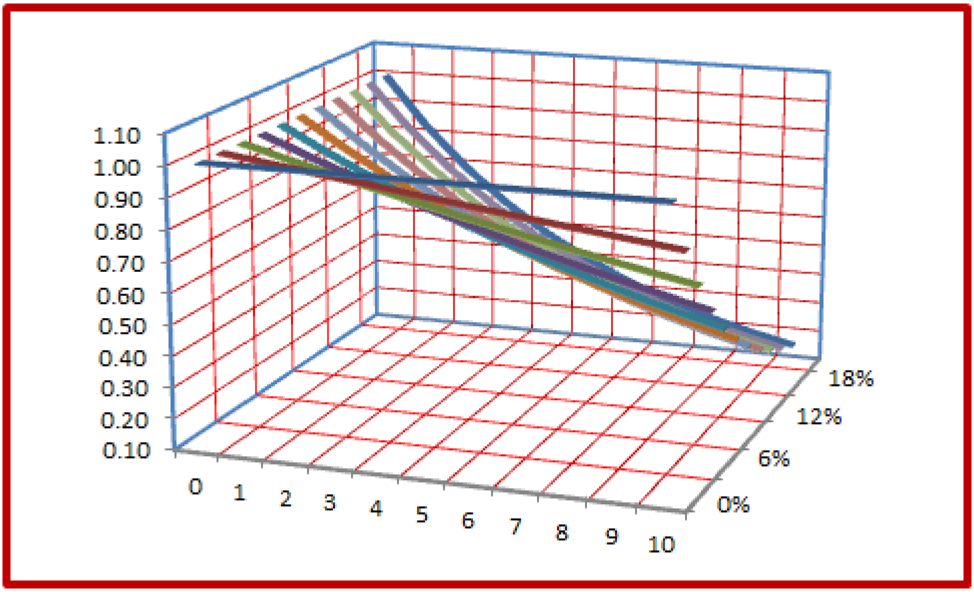
	AN	AO	AP	AQ	AR	AS	AT	AU	AV	AW	AX	AY
1	r_t						i					
2	t	0%	2%	4%	6%	8%	10%	12%	14%	16%	18%	20%
3	0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4	1	1.0000	1.0200	1.0400	1.0600	1.0800	1.1000	1.1200	1.1400	1.1600	1.1800	1.2000
5	2	1.0000	1.0404	1.0816	1.1236	1.1664	1.2100	1.2544	1.2996	1.3456	1.3924	1.4400
6	3	1.0000	1.0612	1.1249	1.1910	1.2597	1.3310	1.4049	1.4815	1.5609	1.6430	1.7280
7	4	1.0000	1.0824	1.1699	1.2625	1.3605	1.4641	1.5735	1.6890	1.8106	1.9388	2.0736
8	5	1.0000	1.1041	1.2167	1.3382	1.4693	1.6105	1.7623	1.9254	2.1003	2.2878	2.4883
9	6	1.0000	1.1262	1.2653	1.4185	1.5869	1.7716	1.9738	2.1950	2.4364	2.6996	2.9860
10	7	1.0000	1.1487	1.3159	1.5036	1.7138	1.9487	2.2107	2.5023	2.8262	3.1855	3.5832
11	8	1.0000	1.1717	1.3686	1.5938	1.8509	2.1436	2.4760	2.8526	3.2784	3.7589	4.2998
12	9	1.0000	1.1951	1.4233	1.6895	1.9990	2.3579	2.7731	3.2519	3.8030	4.4355	5.1598
13	10	1.0000	1.2190	1.4802	1.7908	2.1589	2.5937	3.1058	3.7072	4.4114	5.2338	6.1917

	AN	AO	AP	AQ
1	r_t			
2	*t*	*0*	*0.02*	*0.04*
3	*0*	=(1+AO$2)^$AN3	=(1+AP$2)^$AN3	=(1+AQ$2)^$AN3
4	*1*	=(1+AO$2)^$AN4	=(1+AP$2)^$AN4	=(1+AQ$2)^$AN4
5	*2*	=(1+AO$2)^$AN5	=(1+AP$2)^$AN5	=(1+AQ$2)^$AN5



	BA	BB	BC	BD	BE	BF	BG	BH	BI	BJ	BK	BL
1	v_t						*i*					
2	*t*	*0%*	*2%*	*4%*	*6%*	*8%*	*10%*	*12%*	*14%*	*16%*	*18%*	*20%*
3	*0*	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4	*1*	1.0000	0.9804	0.9615	0.9434	0.9259	0.9091	0.8929	0.8772	0.8621	0.8475	0.8333
5	*2*	1.0000	0.9612	0.9246	0.8900	0.8573	0.8264	0.7972	0.7695	0.7432	0.7182	0.6944
6	*3*	1.0000	0.9423	0.8890	0.8396	0.7938	0.7513	0.7118	0.6750	0.6407	0.6086	0.5787
7	*4*	1.0000	0.9238	0.8548	0.7921	0.7350	0.6830	0.6355	0.5921	0.5523	0.5158	0.4823
8	*5*	1.0000	0.9057	0.8219	0.7473	0.6806	0.6209	0.5674	0.5194	0.4761	0.4371	0.4019
9	*6*	1.0000	0.8880	0.7903	0.7050	0.6302	0.5645	0.5066	0.4556	0.4104	0.3704	0.3349
10	*7*	1.0000	0.8706	0.7599	0.6651	0.5835	0.5132	0.4523	0.3996	0.3538	0.3139	0.2791
11	*8*	1.0000	0.8535	0.7307	0.6274	0.5403	0.4665	0.4039	0.3506	0.3050	0.2660	0.2326
12	*9*	1.0000	0.8368	0.7026	0.5919	0.5002	0.4241	0.3606	0.3075	0.2630	0.2255	0.1938
13	*10*	1.0000	0.8203	0.6756	0.5584	0.4632	0.3855	0.3220	0.2697	0.2267	0.1911	0.1615

	BA	BB	BC	BD
1	v_t			
2	*t*	*0*	*0.02*	*0.04*
3	*0*	=(1+BB$2)^-$BA3	=(1+BC$2)^-$BA3	=(1+BD$2)^-$BA3
4	*1*	=(1+BB$2)^-$BA4	=(1+BC$2)^-$BA4	=(1+BD$2)^-$BA4
5	*2*	=(1+BB$2)^-$BA5	=(1+BC$2)^-$BA5	=(1+BD$2)^-$BA5



Esercizio 1.8 (2) - Calcolo di montanti

- ***Calcolare il montante di € 1000 per 2 anni e 3 mesi al tasso annuo effettivo d'interesse del 5.75%***
- ***Calcolare il montante di € 2000 per 3 anni e 9 mesi al tasso annuo effettivo di sconto del 4.30%***
- ***Calcolare il montante di € 3000 per 4 anni e 6 mesi in base alla forza d'interesse costante del 3.50%***

$$M_t = P_0 \cdot (1+i)^t = 1000 \cdot (1+0.0575)^{2.25}$$
$$M_t = P_0 \cdot (1-d)^{-t} = 2000 \cdot (1-0.043)^{-3.75} \;\ldots = 2000 \cdot (1+\underbrace{0.04493}_{i=\frac{0.043}{1-0.043}})^{3.75}$$
$$M_t = P_0 \cdot e^{\delta t} = 3000 \cdot e^{0.035 \cdot 4.50} \;\ldots = 3000 \cdot (1+\underbrace{0.03562}_{i=e^{0.035}-1})^{4.50}$$

	AB	AC	AD	AE
1	P_0	i	t	M_t
2	1000.00	5.75%	2.25	1134.05
3	P_0	d	t	M_t
4	2000.00	4.30%	3.75	2358.36
5	P_0	δ	t	M_t
6	3000.00	3.50%	4.50	3511.74

	AB	AC	AD	AE
1	P_0	i	t	M_t
2	1000	0.0575	2.25	=AB2*(1+AC2)^AD2
3	P_0	d	t	M_t
4	2000	0.043	3.75	=AB4*(1-AC4)^-AD4
5	P_0	δ	t	M_t
6	3000	0.035	4.5	=AB6*EXP(AC6*AD6)

Esercizio 1.8 (3) - Calcolo di valori attuali

- ***Calcolare il valore attuale di € 6000 per 1 anni e 3 mesi al tasso annuo effettivo d'interesse del 3.75%***
- ***Calcolare il valore attuale di € 5000 per 2 anni e 6 mesi al tasso annuo effettivo di sconto del 2.70%***
- ***Calcolare il valore attuale di € 4000 per 7 anni e 9 mesi in base alla forza di sconto costante del 2.50%***

$$P_0 = M_t \cdot (1+i)^{-t} = 6000 \cdot (1+0.0375)^{-1.25}$$

$$P_0 = M_t \cdot (1-d)^{t} = 5000 \cdot (1-0.027)^{2.50} \ \ldots = 5000 \cdot (1+\underbrace{0.02775}_{i=\frac{0.027}{1-0.027}})^{-2.50}$$

$$P_0 = M_t \cdot e^{-\delta t} = 4000 \cdot e^{-0.025 \cdot 7.75} \ \ldots = 4000 \cdot (1+\underbrace{0.02532}_{i=e^{0.025}-1})^{-7.75}$$

	AB	AC	AD	AE
8	M_t	i	t	P_0
9	6000.00	3.75%	1.25	5730.15
10	M_t	d	t	P_0
11	5000.00	2.70%	2.50	4669.30
12	M_t	δ	t	P_0
13	4000.00	2.50%	7.75	3295.46

	AB	AC	AD	AE
8	M_t	i	t	P_0
9	6000	0.0375	1.25	=AB9*(1+AC9)^-AD9
10	M_t	d	t	P_0
11	5000	0.027	2.5	=AB11*(1-AC11)^AD11
12	M_t	δ	t	P_0
13	4000	0.025	7.75	=AB13*EXP(-AC13*AD13)

Esercizio 1.8 (4) - Calcolo di interessi e sconti

- ***Calcolare l'interesse (e lo sconto) prodotto da € 8000 per 18 mesi al tasso annuo effettivo d'interesse del 4.75%***
- ***Calcolare l'interesse (e lo sconto) prodotto da € 7800 per 3 anni e 6 mesi al tasso annuo effettivo di sconto del 1.70%***
- ***Calcolare l'interesse (e lo sconto) prodotto da € 6700 per 6 anni in base alla forza d'interesse/sconto costante dello 0.75%***

$$I_t = P_0 \cdot ((1+i)^t - 1) = 8000 \cdot ((1+0.0475)^{1.50} - 1)$$
$$I_t = P_0 \cdot ((1-d)^{-t} - 1) = 7800 \cdot ((1-0.017)^{-3.50} - 1)$$
$$\dots = 7800 \cdot ((1+\underbrace{0.01729}_{i=\frac{0.017}{1-0.017}})^{3.50} - 1)$$
$$I_t = P_0 \cdot (e^{\delta t} - 1) = 6700 \cdot (e^{0.0075 \cdot 6} - 1) \dots = 6700 \cdot ((1+\underbrace{0.00753}_{i=e^{0.0075}-1})^{6} - 1)$$

$$D_t = M_t \cdot (1-(1+i)^{-t}) = 8000 \cdot (1-(1+0.0475)^{-1.50})$$
$$D_t = M_t \cdot (1-(1-d)^{t}) = 7800 \cdot (1-(1-0.017)^{3.50})$$
$$\dots = 7800 \cdot (1-(1+\underbrace{0.01729}_{i=\frac{0.017}{1-0.017}})^{-3.50})$$
$$D_t = P_0 \cdot (1-e^{-\delta t}) = 6700 \cdot (1-e^{-0.0075 \cdot 6}) \dots = 6700 \cdot (1-(1+\underbrace{0.00753}_{i=e^{0.0075}-1})^{-6})$$

	AB	AC	AD	AE
15	P_0	i	t	I_t
16	8000.00	4.75%	1.50	576.72
17	P_0	d	t	I_t
18	7800.00	1.70%	3.50	482.42
19	P_0	δ	t	I_t
20	6700.00	0.75%	6.00	308.39

	AB	AC	AD	AE
21	M_t	i	t	D_t
22	8000.00	4.75%	1.50	537.94
23	M_t	d	t	D_t
24	7800.00	1.70%	3.50	454.32
25	M_t	δ	t	D_t
26	6700.00	0.75%	6.00	294.82

	AB	AC	AD	AE
15	P_0	i	t	I_t
16	8000	0.0475	1.5	=AB16*((1+AC16)^AD16-1)
17	P_0	d	t	I_t
18	7800	0.017	3.5	=AB18*((1-AC18)^-AD18-1)
19	P_0	δ	t	I_t
20	6700	0.0075	6	=AB20*(EXP(AC20*AD20)-1)

	AB	AC	AD	AE
21	M_t	i	t	D_t
22	8000	0.0475	1.5	=AB22*(1-(1+AC22)^-AD22)
23	M_t	d	t	D_t
24	7800	0.017	3.5	=AB24*(1-(1-AC24)^AD24)
25	M_t	δ	t	D_t
26	6700	0.0075	6	=AB26*(1-EXP(-AC26*AD26))

Esercizio 1.8 (5) - Calcolo di tassi di interesse e di sconto

- *Calcolare il tasso annuo effettivo d'interesse (e di sconto e la relativa forza d'interesse/sconto costante) relativamente ad un'operazione caratterizzata da:*
  - *importo iniziale di € 18000,*
  - *importo finale di € 20000,*
  - *durata di 5 anni e 9 mesi*

$$i = \left(\frac{M_t}{P_0}\right)^{\frac{1}{t}} - 1 = \left(\frac{20000}{18000}\right)^{\frac{1}{5.75}} - 1$$

$$d = 1 - \left(\frac{P_0}{M_t}\right)^{\frac{1}{t}} = 1 - \left(\frac{18000}{20000}\right)^{\frac{1}{5.75}} \quad \dots = \frac{i}{1+i}$$

$$\delta = \frac{\lg M_t - \lg P_0}{t} = \frac{\lg 20000 - \lg 18000}{5.75} \quad \dots = \lg(1+i)$$

	AG	AH	AI	AJ	AK	AL
1	P_0	M_t	t	i	d	δ
2	18000.00	20000.00	5.75	1.8492%	1.8157%	1.8324%

	AG	AH	AI	AJ
1	P_0	M_t	t	i
2	18000	20000	5.75	=(AH2/AG2)^(1/AI2)-1

	AK	AL
1	d	δ
2	=1-(AG2/AH2)^(1/AI2)	=(LN(AH2)-LN(AG2))/AI2

Esercizio 1.8 (6) - Calcolo del tempo

- ***Determinare in quanto tempo un capitale di € 10000 genera un montante di € 15000 al tasso annuo effettivo d'interesse del 12.50%***

$$t = \frac{lg\, M_t - lg\, P_0}{lg(1+i)} = \frac{lg\,15000 - lg\,10000}{lg(1+0.125)}$$

	AG	AH	AI	AJ
4	P_0	M_t	i	t
5	10000.00	15000.00	12.50%	3.44

	AG	AH	AI	AJ
4	P_0	M_t	i	t
5	10000	15000	0.125	=(LN(AH5)-LN(AG5))/LN(1+AI5)

Esercizio 1.8 (7) - Calcolo di capitali impiegati

- ***Al tempo iniziale 0 si è impiegato un capitale di importo C e dopo 18 mesi un ulteriore capitale di importo 2C e alla fine del***

quinto anno si è ottenuto un montante pari ad € 5000. Avendo effettuato l'operazione al tasso annuo effettivo d'interesse del 6.50%, si determini l'ammontare dei due capitali impiegati

$$C\cdot(1+i)^{t_1}+2C\cdot(1+i)^{t_2}=M \;\Rightarrow\; C=\frac{M}{(1+i)^{t_1}+2\cdot(1+i)^{t_2}}$$

$$C\cdot(1+0.065)^{5}+2C\cdot(1+0.065)^{3.5}=5000 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; C=\frac{5000}{1.065^{5}+2\cdot 1.065^{3.5}}$$

	AG	AH	AI	AJ
7	M_t	t_1	t_2	i
8	5000.00	5.00	3.50	6.50%
9		1.00	2.00	
10		1.3701	2.4932	
11		C	2C	
12		1294.24	2588.48	

	AG	AH	AI	AJ
7	M_t	t_1	t_2	i
8	5000	5	3.5	0.065
9		1	2	
10		=AH9*(1+$AJ8)^AH8	=AI9*(1+$AJ8)^AI8	
11		C	2C	
12		=AG8/(AH10+AI10)	=AI9*AH12	

Esercizio 1.8 (8) - Calcolo del periodo di raddoppio (1) >>>

- ***Calcolo del periodo di raddoppio del capitale al variare del tasso annuo effettivo di interesse***

$$\underset{\substack{i=1\%\\(1\%)}}{\overset{20\%}{\square}}\; t(i,2)\simeq\frac{0.72}{i}\;,\;=\frac{\lg 2}{\lg(1+i)}\;,\;\simeq\frac{\lg 2}{i}\;,\;\simeq \lg 2\cdot\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{2}\right)$$

	K	L	M	N	O
1	2	Paciolo	Esatto	Approx1	Approx2
2	Tax	0.72	0.6931472	0.69315	0.34657
3	1%	72.000	69.661	69.315	69.661
4	2%	36.000	35.003	34.657	35.004
5	3%	24.000	23.450	23.105	23.451
6	4%	18.000	17.673	17.329	17.675
7	5%	14.400	14.207	13.863	14.210
8	6%	12.000	11.896	11.552	11.899
9	7%	10.286	10.245	9.902	10.249
10	8%	9.000	9.006	8.664	9.011
11	9%	8.000	8.043	7.702	8.048
12	10%	7.200	7.273	6.931	7.278
13	11%	6.545	6.642	6.301	6.648
14	12%	6.000	6.116	5.776	6.123
15	13%	5.538	5.671	5.332	5.678
16	14%	5.143	5.290	4.951	5.298
17	15%	4.800	4.959	4.621	4.968
18	16%	4.500	4.670	4.332	4.679
19	17%	4.235	4.415	4.077	4.424
20	18%	4.000	4.188	3.851	4.197
21	19%	3.789	3.985	3.648	3.995
22	20%	3.600	3.802	3.466	3.812

	K	L	M	N	O
1	2	Paciolo	Esatto	Approx1	Approx2
2	Tax	0.72	=LN(K1)	=M2	=N2/2
3	0.01	=L$2/K3	=M$2/LN(1+K3)	=N$2/K3	=N3+O$2
4	0.02	=L$2/K4	=M$2/LN(1+K4)	=N$2/K4	=N4+O$2
5	0.03	=L$2/K5	=M$2/LN(1+K5)	=N$2/K5	=N5+O$2

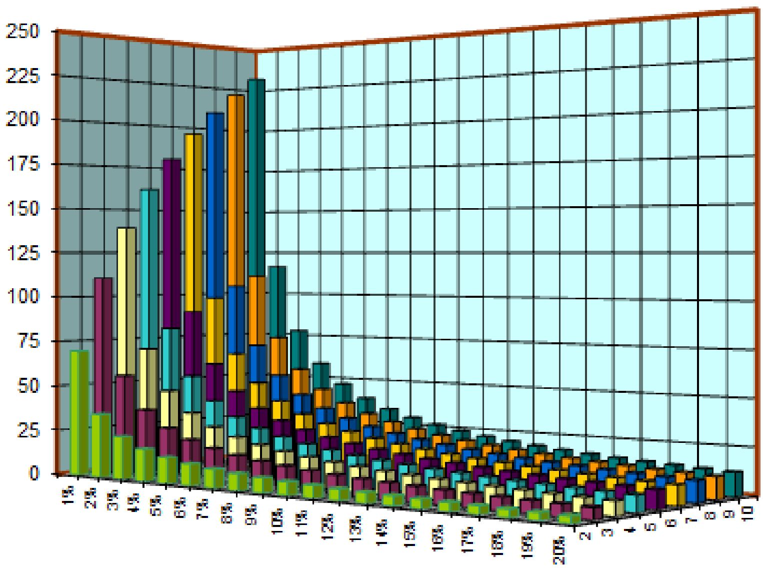
Esercizio 1.8 (9) - Calcolo del periodo di raddoppio (2) >>>

- ***Calcolo del periodo di raddoppio, triplicazione … di un capitale al variare del tasso annuo effettivo d'interesse***

$$\underset{k=2}{\overset{10}{\square}}\ \underset{\substack{i=1\%\\(1\%)}}{\overset{20\%}{\square}}\ t(i,k)=\frac{lg\,k}{lg(1+i)}$$

	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
2	Tax	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	1%	69.7	110.4	139.3	161.7	180.1	195.6	209.0	220.8	231.4
4	2%	35.0	55.5	70.0	81.3	90.5	98.3	105.0	111.0	116.3
5	3%	23.4	37.2	46.9	54.4	60.6	65.8	70.3	74.3	77.9
6	4%	17.7	28.0	35.3	41.0	45.7	49.6	53.0	56.0	58.7
7	5%	14.2	22.5	28.4	33.0	36.7	39.9	42.6	45.0	47.2
8	6%	11.9	18.9	23.8	27.6	30.7	33.4	35.7	37.7	39.5
9	7%	10.2	16.2	20.5	23.8	26.5	28.8	30.7	32.5	34.0
10	8%	9.0	14.3	18.0	20.9	23.3	25.3	27.0	28.5	29.9
11	9%	8.0	12.7	16.1	18.7	20.8	22.6	24.1	25.5	26.7
12	10%	7.3	11.5	14.5	16.9	18.8	20.4	21.8	23.1	24.2
13	11%	6.6	10.5	13.3	15.4	17.2	18.6	19.9	21.1	22.1
14	12%	6.1	9.7	12.2	14.2	15.8	17.2	18.3	19.4	20.3
15	13%	5.7	9.0	11.3	13.2	14.7	15.9	17.0	18.0	18.8
16	14%	5.3	8.4	10.6	12.3	13.7	14.9	15.9	16.8	17.6
17	15%	5.0	7.9	9.9	11.5	12.8	13.9	14.9	15.7	16.5
18	16%	4.7	7.4	9.3	10.8	12.1	13.1	14.0	14.8	15.5
19	17%	4.4	7.0	8.8	10.3	11.4	12.4	13.2	14.0	14.7
20	18%	4.2	6.6	8.4	9.7	10.8	11.8	12.6	13.3	13.9
21	19%	4.0	6.3	8.0	9.3	10.3	11.2	12.0	12.6	13.2
22	20%	3.8	6.0	7.6	8.8	9.8	10.7	11.4	12.1	12.6

	Q	R	S
2	Tax	2	3
3	0.01	=LN(R$2)/LN(1+$Q3)	=LN(S$2)/LN(1+$Q3)
4	0.02	=LN(R$2)/LN(1+$Q4)	=LN(S$2)/LN(1+$Q4)
5	0.03	=LN(R$2)/LN(1+$Q5)	=LN(S$2)/LN(1+$Q5)

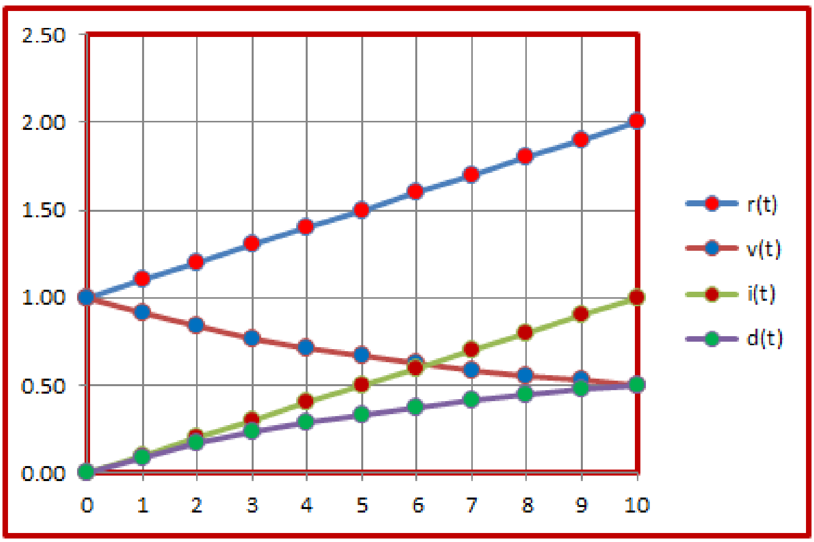


Esercizio 1.9 (1) - Funzioni finanziarie al variare della durata

$$\prod_{t=0}^{10}\left(r_t = 1 + i\,t \;, v_t = \frac{1-d}{1+d\cdot(t-1)} \;, i_t = r_t - 1 \;, d_t = 1 - v_t \;, \delta_t = \frac{i}{1+i\,t} \right)$$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	*i*	*10.0000%*	.	*t*	r_t	v_t	i_t	d_t	δ_t
2	*d*	*9.0909%*		*0*	*1.0000*	*1.0000*	*0.0000*	*0.0000*	*10.0000%*
3	*r*	*1.1000*		*1*	*1.1000*	*0.9091*	*0.1000*	*0.0909*	*9.0909%*
4	*v*	*0.9091*		*2*	*1.2000*	*0.8333*	*0.2000*	*0.1667*	*8.3333%*
5				*3*	*1.3000*	*0.7692*	*0.3000*	*0.2308*	*7.6923%*
6				*4*	*1.4000*	*0.7143*	*0.4000*	*0.2857*	*7.1429%*
7				*5*	*1.5000*	*0.6667*	*0.5000*	*0.3333*	*6.6667%*
8				*6*	*1.6000*	*0.6250*	*0.6000*	*0.3750*	*6.2500%*
9				*7*	*1.7000*	*0.5882*	*0.7000*	*0.4118*	*5.8824%*
10				*8*	*1.8000*	*0.5556*	*0.8000*	*0.4444*	*5.5556%*
11				*9*	*1.9000*	*0.5263*	*0.9000*	*0.4737*	*5.2632%*
12				*10*	*2.0000*	*0.5000*	*1.0000*	*0.5000*	*5.0000%*
13									
14				*100*	*11.0000*	*0.0909*	*10.0000*	*0.9091*	*0.9091%*

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	*i*	*0.1*	.	*t*	r_t	v_t	i_t	d_t	δ_t
2	*d*	*=B1/(1+B1)*		*0*	*=1+B$1*D2*	*=(1-B$2)/(1+B$2*(D2-1))*	*=E2-1*	*=1-F2*	*=B$1/(1+B$1*D2)*
3	*r*	*=1+B1*		*1*	*=1+B$1*D3*	*=(1-B$2)/(1+B$2*(D3-1))*	*=E3-1*	*=1-F3*	*=B$1/(1+B$1*D3)*
4	*v*	*=1-B2*		*2*	*=1+B$1*D4*	*=(1-B$2)/(1+B$2*(D4-1))*	*=E4-1*	*=1-F4*	*=B$1/(1+B$1*D4)*

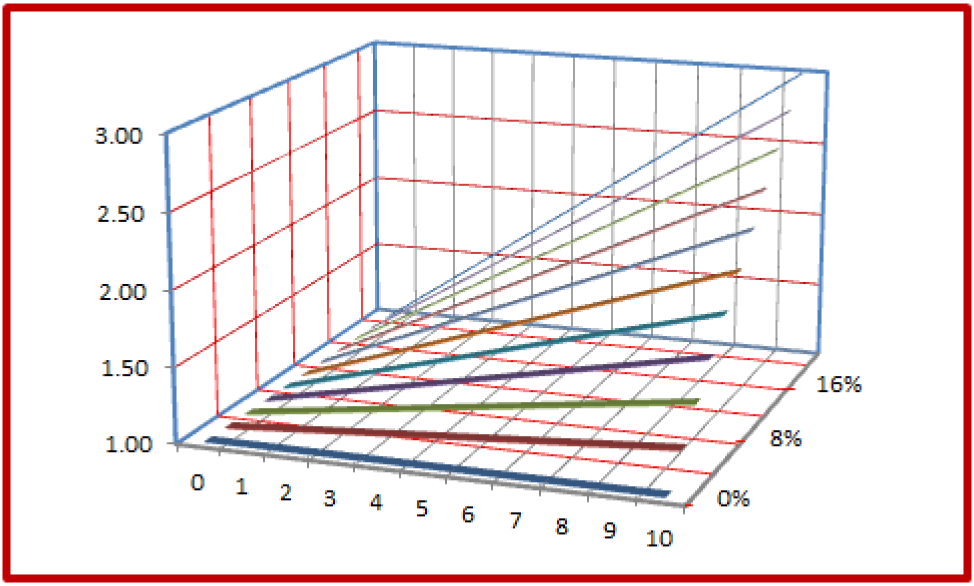


$$\underset{t=0}{\overset{10}{\square}}\ \underset{\substack{i=0\% \\ (2\%)}}{\overset{20\%}{\square}}\ r_t(i)=1+i\,t$$

$$\underset{t=0}{\overset{10}{\square}}\ \underset{\substack{i=0\% \\ (2\%)}}{\overset{20\%}{\square}}\ v_t(i)=\frac{1}{1+i\,t}$$

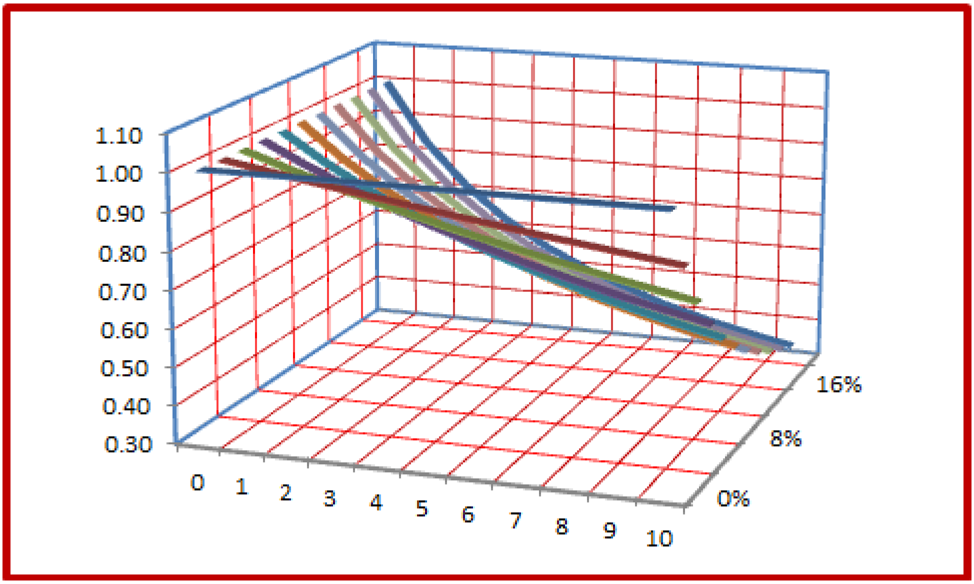
	AN	AO	AP	AQ	AR	AS	AT	AU	AV	AW	AX	AY
1	r_t						*i*					
2	*t*	*0%*	*2%*	*4%*	*6%*	*8%*	*10%*	*12%*	*14%*	*16%*	*18%*	*20%*
3	0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4	1	1.0000	1.0200	1.0400	1.0600	1.0800	1.1000	1.1200	1.1400	1.1600	1.1800	1.2000
5	2	1.0000	1.0400	1.0800	1.1200	1.1600	1.2000	1.2400	1.2800	1.3200	1.3600	1.4000
6	3	1.0000	1.0600	1.1200	1.1800	1.2400	1.3000	1.3600	1.4200	1.4800	1.5400	1.6000
7	4	1.0000	1.0800	1.1600	1.2400	1.3200	1.4000	1.4800	1.5600	1.6400	1.7200	1.8000
8	5	1.0000	1.1000	1.2000	1.3000	1.4000	1.5000	1.6000	1.7000	1.8000	1.9000	2.0000
9	6	1.0000	1.1200	1.2400	1.3600	1.4800	1.6000	1.7200	1.8400	1.9600	2.0800	2.2000
10	7	1.0000	1.1400	1.2800	1.4200	1.5600	1.7000	1.8400	1.9800	2.1200	2.2600	2.4000
11	8	1.0000	1.1600	1.3200	1.4800	1.6400	1.8000	1.9600	2.1200	2.2800	2.4400	2.6000
12	9	1.0000	1.1800	1.3600	1.5400	1.7200	1.9000	2.0800	2.2600	2.4400	2.6200	2.8000
13	10	1.0000	1.2000	1.4000	1.6000	1.8000	2.0000	2.2000	2.4000	2.6000	2.8000	3.0000

	AN	AO	AP	AQ
1	r_t			
2	*t*	0	0.02	0.04
3	0	=1+AO$2*$AN3	=1+AP$2*$AN3	=1+AQ$2*$AN3
4	1	=1+AO$2*$AN4	=1+AP$2*$AN4	=1+AQ$2*$AN4
5	2	=1+AO$2*$AN5	=1+AP$2*$AN5	=1+AQ$2*$AN5



	BA	BB	BC	BD	BE	BF	BG	BH	BI	BJ	BK	BL
1	v_t		*i*									
2	*t*	*0%*	*2%*	*4%*	*6%*	*8%*	*10%*	*12%*	*14%*	*16%*	*18%*	*20%*
3	*0*	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4	*1*	1.0000	0.9804	0.9615	0.9434	0.9259	0.9091	0.8929	0.8772	0.8621	0.8475	0.8333
5	*2*	1.0000	0.9615	0.9259	0.8929	0.8621	0.8333	0.8065	0.7813	0.7576	0.7353	0.7143
6	*3*	1.0000	0.9434	0.8929	0.8475	0.8065	0.7692	0.7353	0.7042	0.6757	0.6494	0.6250
7	*4*	1.0000	0.9259	0.8621	0.8065	0.7576	0.7143	0.6757	0.6410	0.6098	0.5814	0.5556
8	*5*	1.0000	0.9091	0.8333	0.7692	0.7143	0.6667	0.6250	0.5882	0.5556	0.5263	0.5000
9	*6*	1.0000	0.8929	0.8065	0.7353	0.6757	0.6250	0.5814	0.5435	0.5102	0.4808	0.4545
10	*7*	1.0000	0.8772	0.7813	0.7042	0.6410	0.5882	0.5435	0.5051	0.4717	0.4425	0.4167
11	*8*	1.0000	0.8621	0.7576	0.6757	0.6098	0.5556	0.5102	0.4717	0.4386	0.4098	0.3846
12	*9*	1.0000	0.8475	0.7353	0.6494	0.5814	0.5263	0.4808	0.4425	0.4098	0.3817	0.3571
13	*10*	1.0000	0.8333	0.7143	0.6250	0.5556	0.5000	0.4545	0.4167	0.3846	0.3571	0.3333

	BA	BB	BC	BD
1	v_t			
2	*t*	*0*	*0.02*	*0.04*
3	*0*	=1/(1+BB$2*$BA3)	=1/(1+BC$2*$BA3)	=1/(1+BD$2*$BA3)
4	*1*	=1/(1+BB$2*$BA4)	=1/(1+BC$2*$BA4)	=1/(1+BD$2*$BA4)
5	*2*	=1/(1+BB$2*$BA5)	=1/(1+BC$2*$BA5)	=1/(1+BD$2*$BA5)



Esercizio 1.9 (2) - Calcolo di montanti

- ***Calcolare il montante di € 1000 per 2 anni e 3 mesi al tasso annuo effettivo d'interesse del 5.75%***
- ***Calcolare il montante di € 2000 per 3 anni e 9 mesi al tasso annuo effettivo di sconto del 4.30%***

$$M_t = P_0 \cdot (1 + i\,t) = 1000 \cdot (1 + 0.0575 \cdot 2.25)$$

$$M_t = \frac{P_0 \cdot (1 + d \cdot (t-1))}{1-d} = \frac{2000 \cdot (1 + 0.043 \cdot (3.75 - 1))}{1 - 0.043}$$

$$\dots = 1000 \cdot (1 + \underbrace{0.04493}_{i=\frac{0.043}{1-0.043}} \cdot 3.75)$$

	AB	AC	AD	AE
1	P_0	i	t	M_t
2	1000.00	5.75%	2.25	1129.38
3	P_0	d	t	M_t
4	2000.00	4.30%	3.75	2336.99

	AB	AC	AD	AE
1	P_0	i	t	M_t
2	1000	0.0575	2.25	=AB2*(1+AC2*AD2)
3	P_0	d	t	M_t
4	2000	0.043	3.75	=AB4*(1+AC4*(AD4-1))/(1-AC4)

Esercizio 1.9 (3) - Calcolo di valori attuali

- *Calcolare il valore attuale di € 6000 per 1 anni e 3 mesi al tasso annuo effettivo d'interesse del 3.75%*
- *Calcolare il valore attuale di € 5000 per 2 anni e 6 mesi al tasso annuo effettivo di sconto del 2.70%*

$$P_0 = \frac{M_t}{1 + i\,t} = \frac{6000}{1 + 0.0375 \cdot 1.25}$$

$$P_0 = \frac{M_t \cdot (1-d)}{1 + d \cdot (t-1)} = \frac{5000 \cdot (1-0.027)}{1 + 0.027 \cdot (2.50-1)} \; \ldots \; = \frac{5000}{1 + \underbrace{0.02775}_{i=\frac{0.027}{1-0.027}} \cdot 2.50}$$

	AB	AC	AD	AE
8	M_t	i	t	P_0
9	6000.00	3.75%	1.25	5731.34
10	M_t	d	t	P_0
11	5000.00	2.70%	2.50	4675.64

	AB	AC	AD	AE
8	M_t	i	t	P_0
9	6000	0.0375	1.25	=AB9/(1+AC9*AD9)
10	M_t	d	t	P_0
11	5000	0.027	2.5	=AB11*(1-AC11)/(1+AC11*(AD11-1))

Esercizio 1.9 (4) - Calcolo di interessi e sconti

- *Calcolare l'interesse (e lo sconto) prodotto da € 8000 per 18 mesi al tasso annuo effettivo d'interesse del 4.75%*
- *Calcolare l'interesse (e lo sconto) prodotto da € 7800 per 3 anni e 6 mesi al tasso annuo effettivo di sconto del 1.70%*

$$I_t = P_0\, i\, t = 8000 \cdot 0.0475 \cdot 1.50$$

$$I_t = \frac{P_0\, d\, t}{1-d} = \frac{7800 \cdot 0.017 \cdot 3.50}{1-0.017} \;\dots = 7800 \cdot \underbrace{0.01729}_{i=\frac{0.017}{1-0.017}} \cdot 3.50$$

$$D_t = \frac{M_t\, i\, t}{1+i\, t} = \frac{8000 \cdot 0.0475 \cdot 1.50}{1+0.0475 \cdot 1.50}$$

$$D_t = \frac{M_t\, d\, t}{1+d\cdot(t-1)} = \frac{7800 \cdot 0.017 \cdot 3.50}{1+0.017\cdot(3.50-1)} \;\dots = \frac{7800 \cdot \underbrace{0.01729}_{i=\frac{0.017}{1-0.017}} \cdot 3.50}{1+\underbrace{0.01729}_{i=\frac{0.017}{1-0.017}} \cdot 3.50}$$

	AB	AC	AD	AE
15	P_0	i	t	I_t
16	8000.00	4.75%	1.50	570.00
17	P_0	d	t	I_t
18	7800.00	1.70%	3.50	472.13

	AB	AC	AD	AE
21	M_t	i	t	D_t
22	8000.00	4.75%	1.50	532.09
23	M_t	d	t	D_t
24	7800.00	1.70%	3.50	445.18

	AB	AC	AD	AE
15	P_0	i	t	I_t
16	8000	0.0475	1.5	=AB16*AC16*AD16
17	P_0	d	t	I_t
18	7800	0.017	3.5	=AB18*AC18*AD18/(1-AC18)

	AB	AC	AD	AE
21	M_t	i	t	D_t
22	8000	0.0475	1.5	=AB22*AC22*AD22/(1+AC22*AD22)
23	M_t	d	t	D_t
24	7800	0.017	3.5	=AB24*AC24*AD24/(1+AC24*(AD24-1))

Esercizio 1.9 (5) - Calcolo di tassi di interesse e di sconto

- ***Calcolare il tasso annuo effettivo d'interesse (e di sconto) relativamente ad un'operazione caratterizzata da:***
  - ***importo iniziale di € 18000,***
  - ***importo finale di € 20000,***
  - ***durata di 5 anni e 9 mesi***

$$i = \frac{M_t - P_0}{P_0\, t} = \frac{20000 - 18000}{18000 \cdot 5.75}$$

$$d = \frac{M_t - P_0}{M_t + P_0 \cdot (t-1)} = \frac{20000 - 18000}{20000 + 18000 \cdot (5.75 - 1)} \ldots = \frac{i}{1+i}$$

	AG	AH	AI	AJ	AK
1	P_0	M_t	t	i	d
2	18000.00	20000.00	5.75	1.9324%	1.8957%

	AG	AH	AI	AJ	AK
1	P_0	M_t	t	i	d
2	18000	20000	5.75	=(AH2-AG2)/(AG2*AI2)	=(AH2-AG2)/(AH2+AG2*(AI2-1))

Esercizio 1.9 (6) - Calcolo del tempo

- ***Determinare in quanto tempo un capitale di € 10000 genera un montante di € 15000 al tasso annuo effettivo d'interesse del 12.50%***

$$t = \frac{M_t - P_0}{P_0\, i} = \frac{15000 - 10000}{10000 \cdot 0.125}$$

	AG	AH	AI	AJ
4	P_0	M_t	i	t
5	10000.00	15000.00	12.50%	4.00

	AG	AH	AI	AJ
4	P_0	M_t	i	t
5	10000	15000	0.125	=(AH5-AG5)/(AG5*AI5)

Esercizio 1.9 (7) - Calcolo di capitali impiegati

- ***Al tempo iniziale 0 si è impiegato un capitale di importo C e dopo 18 mesi un ulteriore capitale di importo 2C e alla fine del quinto anno si è ottenuto un montante pari ad € 5000. Avendo effettuato l'operazione al tasso annuo effettivo d'interesse del 6.50%, si determini l'ammontare dei due capitali impiegati***

$$C \cdot (1 + i\, t_1) + 2C \cdot (1 + i\, t_2) = M \;\Rightarrow\; C = \frac{M}{1 + i\, t_1 + 2 \cdot (1 + i\, t_2)}$$

$$C \cdot (1 + 0.065 \cdot 5) + 2C \cdot (1 + 0.065 \cdot 3.5) = 5000 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; C = \frac{5000}{1 + 0.065 \cdot 5 + 2 \cdot (1 + 0.065 \cdot 3.5)}$$

	AG	AH	AI	AJ
7	M_t	t_1	t_2	i
8	5000.00	5.00	3.50	6.50%
9		1.00	2.00	
10		1.3250	2.4550	
11		C	2C	
12		1322.75	2645.50	

	AG	AH	AI	AJ
7	M_t	t_1	t_2	i
8	5000	5	3.5	0.065
9		1	2	
10		=AH9*(1+$AJ8*AH8)	=AI9*(1+$AJ8*AI8)	
11		C	2C	
12		=AG8/(AH10+AI10)	=AI9*AH12	

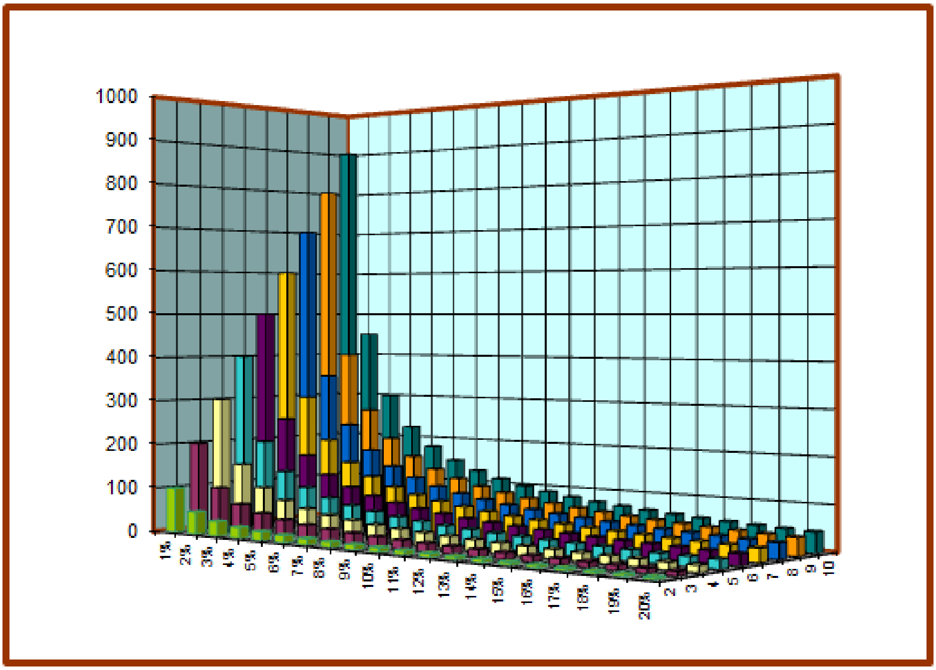
Esercizio 1.9 (8) - Calcolo del periodo di raddoppio (2)

- ***Calcolo del periodo di raddoppio, triplicazione … di un capitale, in base ad un assegnato tasso annuo effettivo d'interesse***

$$\underset{k=2}{\overset{10}{\square}}\ \underset{\substack{i=1\%\\(1\%)}}{\overset{20\%}{\square}}\ t(i,k)=\frac{k-1}{i}$$

	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
2	*Tax*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
3	*1%*	*100.0*	*200.0*	*300.0*	*400.0*	*500.0*	*600.0*	*700.0*	*800.0*	*900.0*
4	*2%*	*50.0*	*100.0*	*150.0*	*200.0*	*250.0*	*300.0*	*350.0*	*400.0*	*450.0*
5	*3%*	*33.3*	*66.7*	*100.0*	*133.3*	*166.7*	*200.0*	*233.3*	*266.7*	*300.0*
6	*4%*	*25.0*	*50.0*	*75.0*	*100.0*	*125.0*	*150.0*	*175.0*	*200.0*	*225.0*
7	*5%*	*20.0*	*40.0*	*60.0*	*80.0*	*100.0*	*120.0*	*140.0*	*160.0*	*180.0*
8	*6%*	*16.7*	*33.3*	*50.0*	*66.7*	*83.3*	*100.0*	*116.7*	*133.3*	*150.0*
9	*7%*	*14.3*	*28.6*	*42.9*	*57.1*	*71.4*	*85.7*	*100.0*	*114.3*	*128.6*
10	*8%*	*12.5*	*25.0*	*37.5*	*50.0*	*62.5*	*75.0*	*87.5*	*100.0*	*112.5*
11	*9%*	*11.1*	*22.2*	*33.3*	*44.4*	*55.6*	*66.7*	*77.8*	*88.9*	*100.0*
12	*10%*	*10.0*	*20.0*	*30.0*	*40.0*	*50.0*	*60.0*	*70.0*	*80.0*	*90.0*
13	*11%*	*9.1*	*18.2*	*27.3*	*36.4*	*45.5*	*54.5*	*63.6*	*72.7*	*81.8*
14	*12%*	*8.3*	*16.7*	*25.0*	*33.3*	*41.7*	*50.0*	*58.3*	*66.7*	*75.0*
15	*13%*	*7.7*	*15.4*	*23.1*	*30.8*	*38.5*	*46.2*	*53.8*	*61.5*	*69.2*
16	*14%*	*7.1*	*14.3*	*21.4*	*28.6*	*35.7*	*42.9*	*50.0*	*57.1*	*64.3*
17	*15%*	*6.7*	*13.3*	*20.0*	*26.7*	*33.3*	*40.0*	*46.7*	*53.3*	*60.0*
18	*16%*	*6.3*	*12.5*	*18.8*	*25.0*	*31.3*	*37.5*	*43.8*	*50.0*	*56.3*
19	*17%*	*5.9*	*11.8*	*17.6*	*23.5*	*29.4*	*35.3*	*41.2*	*47.1*	*52.9*
20	*18%*	*5.6*	*11.1*	*16.7*	*22.2*	*27.8*	*33.3*	*38.9*	*44.4*	*50.0*
21	*19%*	*5.3*	*10.5*	*15.8*	*21.1*	*26.3*	*31.6*	*36.8*	*42.1*	*47.4*
22	*20%*	*5.0*	*10.0*	*15.0*	*20.0*	*25.0*	*30.0*	*35.0*	*40.0*	*45.0*

	Q	R	S
2	*Tax*	*2*	*3*
3	*0.01*	*=(R$2-1)/$Q3*	*=(S$2-1)/$Q3*
4	*0.02*	*=(R$2-1)/$Q4*	*=(S$2-1)/$Q4*
5	*0.03*	*=(R$2-1)/$Q5*	*=(S$2-1)/$Q5*

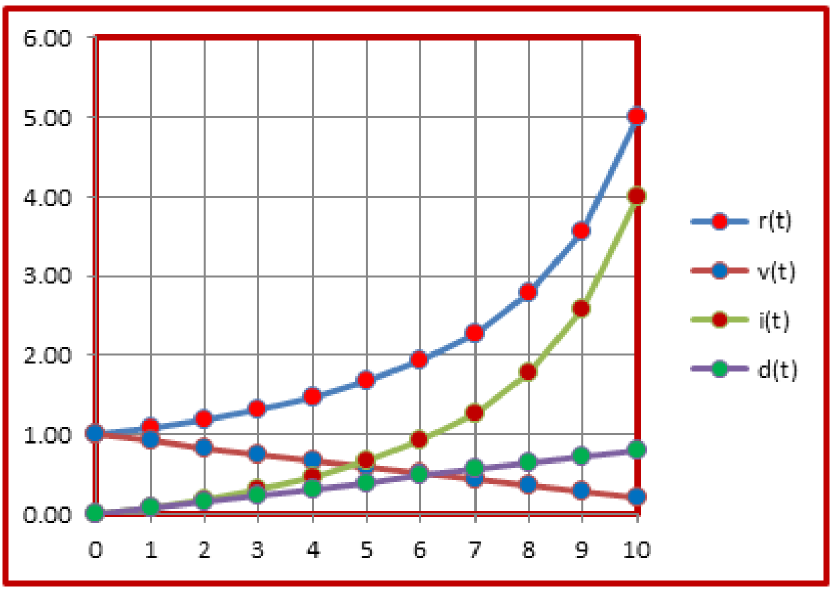


Esercizio 1.10 (1) - Funzioni finanziarie al variare della durata >>>

$$\prod_{t=0}^{10}\left(r_t = \frac{1+i}{1-i\cdot(t-1)} \, , v_t = 1-d\,t \, , i_t = r_t - 1 \, , d_t = 1 - v_t \, , \delta_t = \frac{d}{1-d\,t} \right)$$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	*i*	8.6957%	.	*t*	r_t	v_t	i_t	d_t	δ_t
2	*d*	8.0000%		0	1.0000	1.0000	0.0000	0.0000	8.0000%
3	*r*	1.0870		1	1.0870	0.9200	0.0870	0.0800	8.6957%
4	*v*	0.9200		2	1.1905	0.8400	0.1905	0.1600	9.5238%
5				3	1.3158	0.7600	0.3158	0.2400	10.5263%
6				4	1.4706	0.6800	0.4706	0.3200	11.7647%
7				5	1.6667	0.6000	0.6667	0.4000	13.3333%
8				6	1.9231	0.5200	0.9231	0.4800	15.3846%
9				7	2.2727	0.4400	1.2727	0.5600	18.1818%
10				8	2.7778	0.3600	1.7778	0.6400	22.2222%
11				9	3.5714	0.2800	2.5714	0.7200	28.5714%
12				10	5.0000	0.2000	4.0000	0.8000	40.0000%

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	*i*	=B2/(1-B2)	.	*t*	r_t	v_t	i_t	d_t	δ_t
2	*d*	0.08		0	=(1+B$1)/(1-B$1*(D2-1))	=1-B$2*D2	=E2-1	=1-F2	=B$2/(1-B$2*D2)
3	*r*	=1+B1		1	=(1+B$1)/(1-B$1*(D3-1))	=1-B$2*D3	=E3-1	=1-F3	=B$2/(1-B$2*D3)
4	*v*	=1-B2		2	=(1+B$1)/(1-B$1*(D4-1))	=1-B$2*D4	=E4-1	=1-F4	=B$2/(1-B$2*D4)

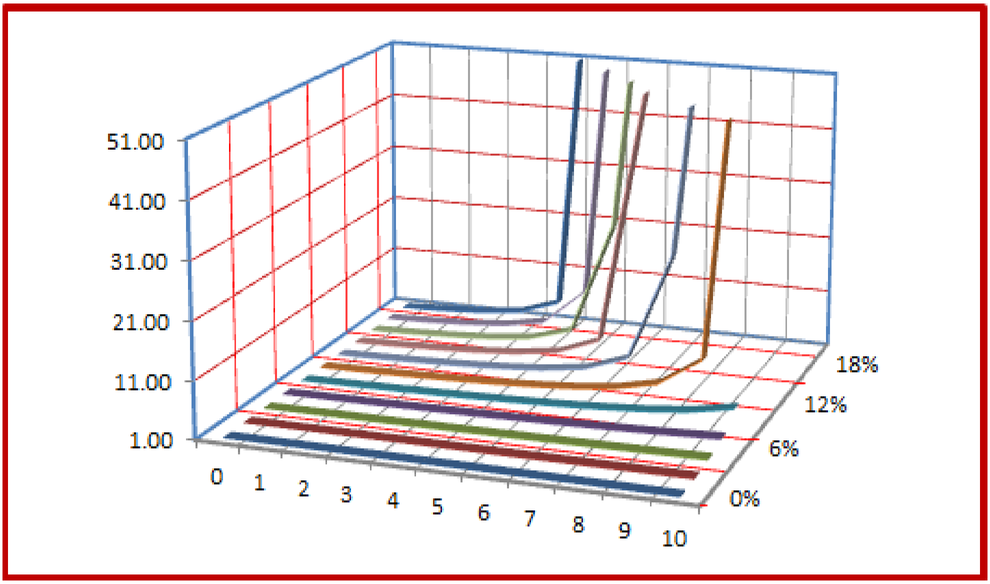


$$\square_{t=0}^{10} \; \square_{i=0\%}^{20\%} \; r_t(d) = \frac{1}{1-d\,t}$$
$$(2\%)$$

$$\square_{t=0}^{10} \; \square_{i=0\%}^{20\%} \; v_t(d) = 1-d\,t$$
$$(2\%)$$

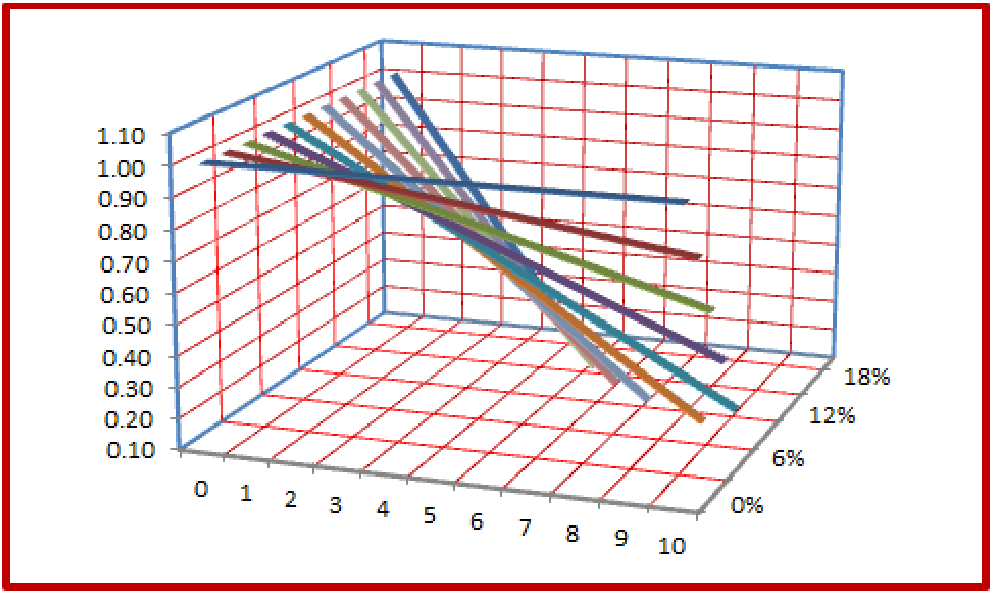
	AN	AO	AP	AQ	AR	AS	AT	AU	AV	AW	AX	AY
1	r_t							d				
2	t	0%	2%	4%	6%	8%	10%	12%	14%	16%	18%	20%
3	0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4	1	1.0000	1.0204	1.0417	1.0638	1.0870	1.1111	1.1364	1.1628	1.1905	1.2195	1.2500
5	2	1.0000	1.0417	1.0870	1.1364	1.1905	1.2500	1.3158	1.3889	1.4706	1.5625	1.6667
6	3	1.0000	1.0638	1.1364	1.2195	1.3158	1.4286	1.5625	1.7241	1.9231	2.1739	2.5000
7	4	1.0000	1.0870	1.1905	1.3158	1.4706	1.6667	1.9231	2.2727	2.7778	3.5714	5.0000
8	5	1.0000	1.1111	1.2500	1.4286	1.6667	2.0000	2.5000	3.3333	5.0000	10.0000	100.0000
9	6	1.0000	1.1364	1.3158	1.5625	1.9231	2.5000	3.5714	6.2500	25.0000	100.0000	100.0000
10	7	1.0000	1.1628	1.3889	1.7241	2.2727	3.3333	6.2500	50.0000	100.0000	100.0000	100.0000
11	8	1.0000	1.1905	1.4706	1.9231	2.7778	5.0000	25.0000	100.0000	100.0000	100.0000	100.0000
12	9	1.0000	1.2195	1.5625	2.1739	3.5714	10.0000	100.0000	100.0000	100.0000	100.0000	100.0000
13	10	1.0000	1.2500	1.6667	2.5000	5.0000	100.0000	100.0000	100.0000	100.0000	100.0000	100.0000

	AN	AO	AP
1	r_t		
2	t	0	0.02
3	0	=SE($AN3*AO$2<1;1/(1-AO$2*$BA3);100)	=SE($AN3*AP$2<1;1/(1-AP$2*$BA3);100)
4	1	=SE($AN4*AO$2<1;1/(1-AO$2*$BA4);100)	=SE($AN4*AP$2<1;1/(1-AP$2*$BA4);100)
5	2	=SE($AN5*AO$2<1;1/(1-AO$2*$BA5);100)	=SE($AN5*AP$2<1;1/(1-AP$2*$BA5);100)



	BA	BB	BC	BD	BE	BF	BG	BH	BI	BJ	BK	BL
1	v_t		*d*									
2	*t*	*0%*	*2%*	*4%*	*6%*	*8%*	*10%*	*12%*	*14%*	*16%*	*18%*	*20%*
3	*0*	*1.0000*	*1.0000*	*1.0000*	*1.0000*	*1.0000*	*1.0000*	*1.0000*	*1.0000*	*1.0000*	*1.0000*	*1.0000*
4	*1*	*1.0000*	*0.9800*	*0.9600*	*0.9400*	*0.9200*	*0.9000*	*0.8800*	*0.8600*	*0.8400*	*0.8200*	*0.8000*
5	*2*	*1.0000*	*0.9600*	*0.9200*	*0.8800*	*0.8400*	*0.8000*	*0.7600*	*0.7200*	*0.6800*	*0.6400*	*0.6000*
6	*3*	*1.0000*	*0.9400*	*0.8800*	*0.8200*	*0.7600*	*0.7000*	*0.6400*	*0.5800*	*0.5200*	*0.4600*	*0.4000*
7	*4*	*1.0000*	*0.9200*	*0.8400*	*0.7600*	*0.6800*	*0.6000*	*0.5200*	*0.4400*	*0.3600*	*0.2800*	*0.2000*
8	*5*	*1.0000*	*0.9000*	*0.8000*	*0.7000*	*0.6000*	*0.5000*	*0.4000*	*0.3000*	*0.2000*	*0.1000*	
9	*6*	*1.0000*	*0.8800*	*0.7600*	*0.6400*	*0.5200*	*0.4000*	*0.2800*	*0.1600*	*0.0400*		
10	*7*	*1.0000*	*0.8600*	*0.7200*	*0.5800*	*0.4400*	*0.3000*	*0.1600*	*0.0200*			
11	*8*	*1.0000*	*0.8400*	*0.6800*	*0.5200*	*0.3600*	*0.2000*	*0.0400*				
12	*9*	*1.0000*	*0.8200*	*0.6400*	*0.4600*	*0.2800*	*0.1000*					
13	*10*	*1.0000*	*0.8000*	*0.6000*	*0.4000*	*0.2000*						

	BA	BB	BC
1	v_t		
2	*t*	*0*	*0.02*
3	*0*	*=SE($BA3*BB$2<1;1-BB$2*$BA3;" ")*	*=SE($BA3*BC$2<1;1-BC$2*$BA3;" ")*
4	*1*	*=SE($BA4*BB$2<1;1-BB$2*$BA4;" ")*	*=SE($BA4*BC$2<1;1-BC$2*$BA4;" ")*
5	*2*	*=SE($BA5*BB$2<1;1-BB$2*$BA5;" ")*	*=SE($BA5*BC$2<1;1-BC$2*$BA5;" ")*



Esercizio 1.10 (2) - Calcolo di montanti

- ***Calcolare il montante di € 1000 per 2 anni e 3 mesi al tasso annuo effettivo d'interesse del 5.75%***
- ***Calcolare il montante di € 2000 per 3 anni e 9 mesi al tasso annuo effettivo di sconto del 4.30%***

$$M_t = \frac{P_0 \cdot (1+i)}{1-i \cdot (t-1)} = \frac{1000 \cdot (1+0.0575)}{1-0.0575 \cdot (2.25-1)} \dots = \frac{1000}{1-\underbrace{0.05437}_{d=\frac{0.0575}{1+0.0575}} \cdot 2.25}$$

$$M_t = \frac{P_0}{1-d\,t} = \frac{2000}{1-0.043 \cdot 3.75}$$

	AB	AC	AD	AE
1	P_0	i	t	M_t
2	1000.00	5.75%	2.25	1139.39
3	P_0	d	t	M_t
4	2000.00	4.30%	3.75	2384.50

	AB	AC	AD	AE
1	P_0	i	t	M_t
2	1000	0.0575	2.25	=AB2*(1+AC2)/(1-AC2*(AD2-1))
3	P_0	d	t	M_t
4	2000	0.043	3.75	=AB4/(1-AC4*AD4)

Esercizio 1.10 (3) - Calcolo di valori attuali

- ***Calcolare il valore attuale di € 6000 per 1 anni e 3 mesi al tasso annuo effettivo d'interesse del 3.75%***
- ***Calcolare il valore attuale di € 5000 per 2 anni e 6 mesi al tasso annuo effettivo di sconto del 2.70%***

$$P_0 = \frac{M_t \cdot (1 - i \cdot (t-1))}{1+i} = \frac{6000 \cdot (1 - 0.0375 \cdot (1.25 - 1))}{1 + 0.0375}$$

$$\ldots = 6000 \cdot (1 - \underbrace{0.03614}_{d = \frac{0.0375}{1+0.0375}} \cdot 1.25)$$

$$P_0 = M_t \cdot (1 - d\, t) = 5000 \cdot (1 - 0.027 \cdot 2.50)$$

	AB	AC	AD	AE
8	M_t	i	t	P_0
9	6000.00	3.75%	1.25	5728.92
10	M_t	d	t	P_0
11	5000.00	2.70%	2.50	4662.50

	AB	AC	AD	AE
8	M_t	i	t	P_0
9	6000	0.0375	1.25	=AB9*(1-AC9*(AD9-1))/(1+AC9)
10	M_t	d	t	P_0
11	5000	0.027	2.5	=AB11*(1-AC11*AD11)

Esercizio 1.10 (4) - Calcolo di interessi e sconti

- *Calcolare l'interesse (e lo sconto) prodotto da € 8000 per 18 mesi al tasso annuo effettivo d'interesse del 4.75%*
- *Calcolare l'interesse (e lo sconto) prodotto da € 7800 per 3 anni e 6 mesi al tasso annuo effettivo di sconto del 1.70%*

$$I_t = \frac{P_0\, i\, t}{1 - i \cdot (t-1)} = \frac{8000 \cdot 0.0475 \cdot 1.50}{1 - 0.0475 \cdot (1.50 - 1)} \ldots = \frac{8000 \cdot \underbrace{0.04534}_{d = \frac{0.0475}{1+0.0475}} \cdot 1.50}{1 - \underbrace{0.04534}_{d = \frac{0.0475}{1+0.0475}} \cdot 1.50}$$

$$I_t = \frac{P_0\, d\, t}{1 - d\, t} = \frac{7800 \cdot 0.017 \cdot 3.50}{1 - 0.017 \cdot 3.50}$$

$$D_t = \frac{M_t\, i\, t}{1+i} = \frac{8000 \cdot 0.0475 \cdot 1.50}{1+0.0475} \ldots = 8000 \cdot \underbrace{0.04534}_{d=\frac{0.0475}{1+0.0475}} \cdot 1.50$$

$$D_t = M_t\, d\, t = 7800 \cdot 0.017 \cdot 3.50$$

	AB	AC	AD	AE
15	P_0	i	t	I_t
16	8000.00	4.75%	1.50	583.87
17	P_0	d	t	I_t
18	7800.00	1.70%	3.50	493.46

	AB	AC	AD	AE
21	M_t	i	t	D_t
22	8000.00	4.75%	1.50	544.15
23	M_t	d	t	D_t
24	7800.00	1.70%	3.50	464.10

	AB	AC	AD	AE
15	P_0	i	t	I_t
16	8000	0.0475	1.5	=AB16*AC16*AD16/(1-AC16*(AD16-1))
17	P_0	d	t	I_t
18	7800	0.017	3.5	=AB18*AC18*AD18/(1-AC18*AD18)

	AB	AC	AD	AE
21	M_t	i	t	D_t
22	8000	0.0475	1.5	=AB22*AC22*AD22/(1+AC22)
23	M_t	d	t	D_t
24	7800	0.017	3.5	=AB24*AC24*AD24

Esercizio 1.10 (5) - Calcolo di tassi di interesse e di sconto

- *Calcolare il tasso annuo effettivo d'interesse (e di sconto) relativamente ad un'operazione caratterizzata da:*
  - *importo iniziale di € 18000,*
  - *importo finale di € 20000,*
  - *durata di 5 anni e 9 mesi*

$$i = \frac{M_t - P_0}{M_t \cdot (t-1) + P_0} = \frac{20000 - 18000}{20000 \cdot (5.75 - 1) + 18000} \ \dots \ = \frac{d}{1-d}$$

$$d = \frac{M_t - P_0}{M_t\, t} = \frac{20000 - 18000}{20000 \cdot 5.75}$$

	AG	AH	AI	AJ	AK
1	P_0	M_t	t	i	d
2	18000.00	20000.00	5.75	1.7699%	1.7391%

	AG	AH	AI	AJ	AK
1	P_0	M_t	t	i	d
2	18000	20000	5.75	=(AH2-AG2)/(AH2*(AI2-1)+AG2)	=(AH2-AG2)/(AH2*AI2)

Esercizio 1.10 (6) - Calcolo del tempo

- *Determinare in quanto tempo un capitale di € 10000 genera un montante di € 15000 al tasso annuo effettivo di sconto del 12.50%*

$$t = \frac{M_t - P_0}{M_t\, d} = \frac{15000 - 10000}{15000 \cdot 0.125}$$

	AG	AH	AI	AJ
4	P_0	M_t	d	t
5	10000.00	15000.00	12.50%	2.67

	AG	AH	AI	AJ
4	P_0	M_t	d	t
5	10000	15000	0.125	=(AH5-AG5)/(AH5*AI5)

Esercizio 1.10 (7) - Calcolo di capitali impiegati

- *Al tempo iniziale 0 si è impiegata un capitale di importo C e dopo 18 mesi un ulteriore capitale di importo 2C e alla fine del*

quinto anno si è ottenuto un montante pari ad € 5000. Avendo effettuato l'operazione al tasso annuo effettivo di sconto del 6.50%, si determini l'ammontare dei due capitali impiegati

$$\frac{C}{1-d\,t_1}+\frac{2C}{1-d\,t_2}=M \Rightarrow C=\frac{M}{\frac{1}{1-d\,t_1}+\frac{2}{1-d\,t_2}}$$

$$\frac{C}{1-0.065\cdot 5}+\frac{2C}{1-0.065\cdot 3.5}=5000 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C=\frac{5000}{\frac{1}{1-0.065\cdot 5}+\frac{2}{1-0.065\cdot 3.5}}$$

	AG	AH	AI	AJ
7	M_t	t_1	t_2	d
8	5000.00	5.00	3.50	6.50%
9		1.00	2.00	
10		1.4815	2.5890	
11		C	2C	
12		1228.36	2456.71	

	AG	AH	AI	AJ
7	M_t	t_1	t_2	d
8	5000	5	3.5	0.065
9		1	2	
10		=AH9/(1-$AJ8*AH8)	=AI9/(1-$AJ8*AI8)	
11		C	2C	
12		=AG8/(AH10+AI10)	=AI9*AH12	

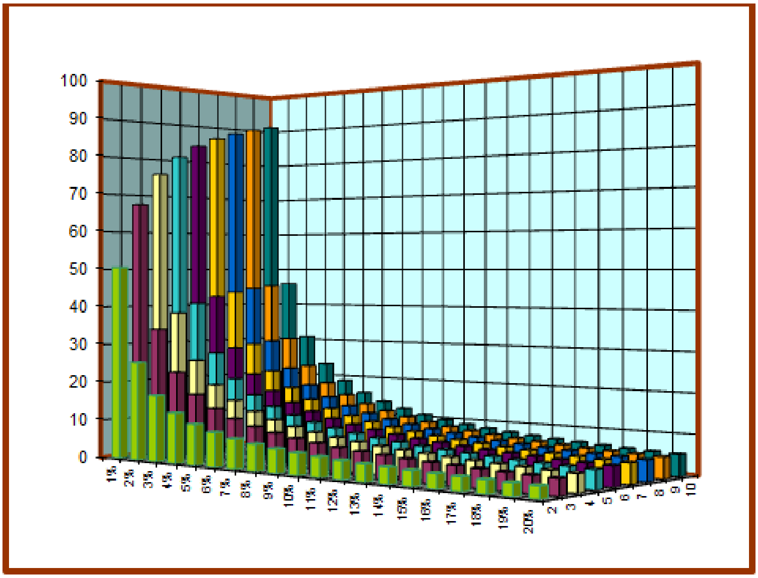
Esercizio 1.10 (8) - Calcolo del periodo di raddoppio (2)

Calcolo del periodo di raddoppio, triplicazione ... di un capitale, in base ad un assegnato tasso annuo effettivo d'interesse

$$\underset{k=2}{\overset{10}{\square}}\ \underset{\substack{i=1\% \\ (1\%)}}{\overset{20\%}{\square}}\ t(i,k)=\frac{k-1}{k\cdot\dfrac{i}{1+i}}$$

	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
2	Tax	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	1%	50.5	67.3	75.8	80.8	84.2	86.6	88.4	89.8	90.9
4	2%	25.5	34.0	38.3	40.8	42.5	43.7	44.6	45.3	45.9
5	3%	17.2	22.9	25.8	27.5	28.6	29.4	30.0	30.5	30.9
6	4%	13.0	17.3	19.5	20.8	21.7	22.3	22.8	23.1	23.4
7	5%	10.5	14.0	15.8	16.8	17.5	18.0	18.4	18.7	18.9
8	6%	8.8	11.8	13.3	14.1	14.7	15.1	15.5	15.7	15.9
9	7%	7.6	10.2	11.5	12.2	12.7	13.1	13.4	13.6	13.8
10	8%	6.8	9.0	10.1	10.8	11.3	11.6	11.8	12.0	12.2
11	9%	6.1	8.1	9.1	9.7	10.1	10.4	10.6	10.8	10.9
12	10%	5.5	7.3	8.3	8.8	9.2	9.4	9.6	9.8	9.9
13	11%	5.0	6.7	7.6	8.1	8.4	8.6	8.8	9.0	9.1
14	12%	4.7	6.2	7.0	7.5	7.8	8.0	8.2	8.3	8.4
15	13%	4.3	5.8	6.5	7.0	7.2	7.5	7.6	7.7	7.8
16	14%	4.1	5.4	6.1	6.5	6.8	7.0	7.1	7.2	7.3
17	15%	3.8	5.1	5.8	6.1	6.4	6.6	6.7	6.8	6.9
18	16%	3.6	4.8	5.4	5.8	6.0	6.2	6.3	6.4	6.5
19	17%	3.4	4.6	5.2	5.5	5.7	5.9	6.0	6.1	6.2
20	18%	3.3	4.4	4.9	5.2	5.5	5.6	5.7	5.8	5.9
21	19%	3.1	4.2	4.7	5.0	5.2	5.4	5.5	5.6	5.6
22	20%	3.0	4.0	4.5	4.8	5.0	5.1	5.3	5.3	5.4

	Q	R	S
2	Tax	2	3
3	0.01	=(R$2-1)/(R$2*($Q3/(1+$Q3)))	=(S$2-1)/(S$2*($Q3/(1+$Q3)))
4	0.02	=(R$2-1)/(R$2*($Q4/(1+$Q4)))	=(S$2-1)/(S$2*($Q4/(1+$Q4)))
5	0.03	=(R$2-1)/(R$2*($Q5/(1+$Q5)))	=(S$2-1)/(S$2*($Q5/(1+$Q5)))



Esercizio 1.11 (1) - Funzioni finanziarie nei 3 regimi finanziari

$$\begin{array}{cccc} & \boxed{cc} & \boxed{cs} & \boxed{ch} \\ \boxed{r_t} = & (1+i)^t & 1+it & \dfrac{1}{\underbrace{1-dt}_{t<\frac{1}{d}}} \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} & \boxed{cc} & \boxed{cs} & \boxed{ch} \\ \boxed{v_t} = & (1-d)^t & \dfrac{1}{1+it} & \underbrace{1-dt}_{t<\frac{1}{d}} \end{array}$$

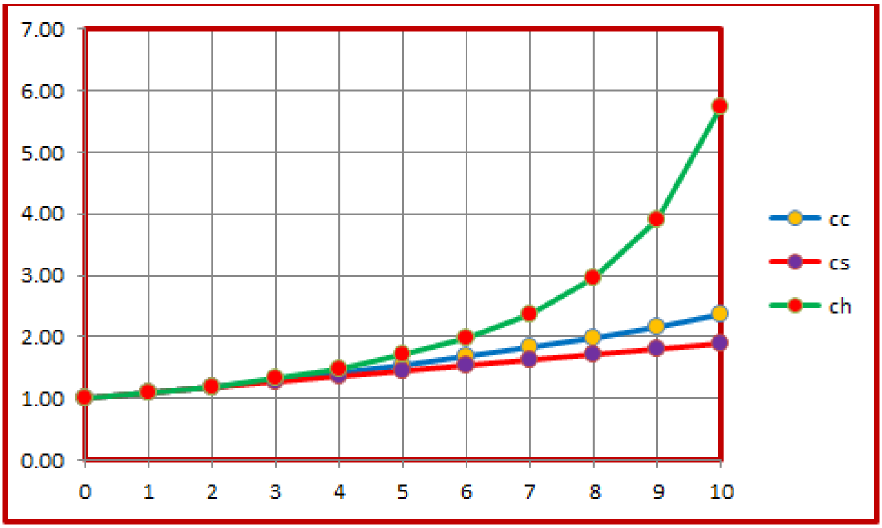
$$\begin{array}{cccc} & \boxed{cc} & \boxed{cs} & \boxed{ch} \\ \boxed{i_t} = & (1+i)^t-1 & it & \dfrac{dt}{\underbrace{1-dt}_{t<\frac{1}{d}}} \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} & \boxed{cc} & \boxed{cs} & \boxed{ch} \\ \boxed{d_t} = & 1-(1-d)^t & \dfrac{it}{1+it} & \underbrace{dt}_{t<\frac{1}{d}} \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} & \boxed{cc} & \boxed{cs} & \boxed{ch} \\ \boxed{\delta_t} = & lg(1+i) & \dfrac{i}{1+it} & \dfrac{d}{\underbrace{1-dt}_{t<\frac{1}{d}}} \end{array}$$

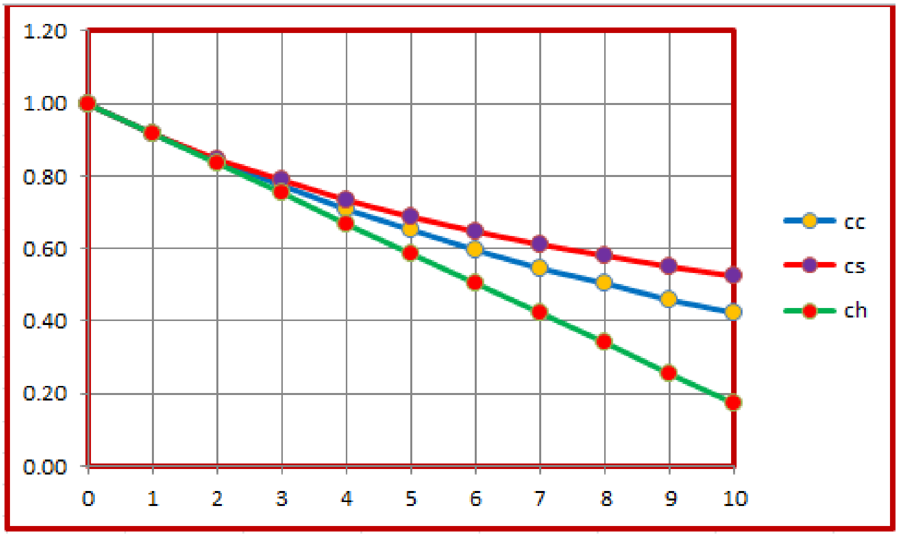
	A	B	C	D	E	F	G
1	*i*	*9.0000%*	.		***cc***	***cs***	***ch***
2	*d*	*8.2569%*		***t***	r_t	r_t	r_t
3				***0***	*1.0000*	*1.0000*	*1.0000*
4				***1***	*1.0900*	*1.0900*	*1.0900*
5				***2***	*1.1881*	*1.1800*	*1.1978*
6				***3***	*1.2950*	*1.2700*	*1.3293*
7				***4***	*1.4116*	*1.3600*	*1.4932*
8				***5***	*1.5386*	*1.4500*	*1.7031*
9				***6***	*1.6771*	*1.5400*	*1.9818*
10				***7***	*1.8280*	*1.6300*	*2.3696*
11				***8***	*1.9926*	*1.7200*	*2.9459*
12				***9***	*2.1719*	*1.8100*	*3.8929*
13				***10***	*2.3674*	*1.9000*	*5.7368*

	A	B	C	D	E	F	G
1	*i*	*0.09*	.		*cc*	*cs*	*ch*
2	*d*	*=B1/(1+B1)*		***t***	r_t	r_t	r_t
3				***0***	*=(1+B$1)^D3*	*=1+B$1*D3*	*=1/(1-B$2*D3)*
4				***1***	*=(1+B$1)^D4*	*=1+B$1*D4*	*=1/(1-B$2*D4)*
5				***2***	*=(1+B$1)^D5*	*=1+B$1*D5*	*=1/(1-B$2*D5)*



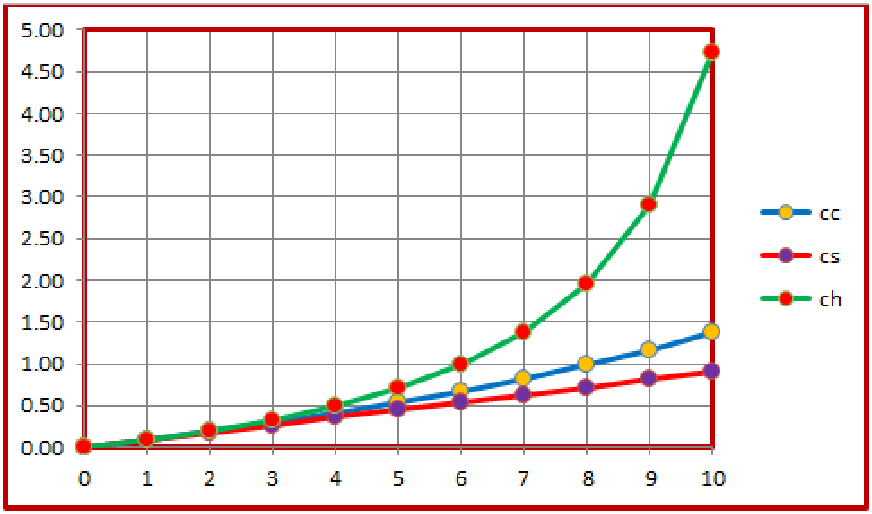
	D	E	F	G
21		*cc*	*cs*	*ch*
22	*t*	v_t	v_t	v_t
23	*0*	1.0000	1.0000	1.0000
24	*1*	0.9174	0.9174	0.9174
25	*2*	0.8417	0.8475	0.8349
26	*3*	0.7722	0.7874	0.7523
27	*4*	0.7084	0.7353	0.6697
28	*5*	0.6499	0.6897	0.5872
29	*6*	0.5963	0.6494	0.5046
30	*7*	0.5470	0.6135	0.4220
31	*8*	0.5019	0.5814	0.3394
32	*9*	0.4604	0.5525	0.2569
33	*10*	0.4224	0.5263	0.1743

	D	E	F	G
21		*cc*	*cs*	*ch*
22	*t*	v_t	v_t	v_t
23	*0*	=(1-B$2)^D3	=1/(1+B$1*D23)	=1-B$2*D23
24	*1*	=(1-B$2)^D4	=1/(1+B$1*D24)	=1-B$2*D24
25	*2*	=(1-B$2)^D5	=1/(1+B$1*D25)	=1-B$2*D25



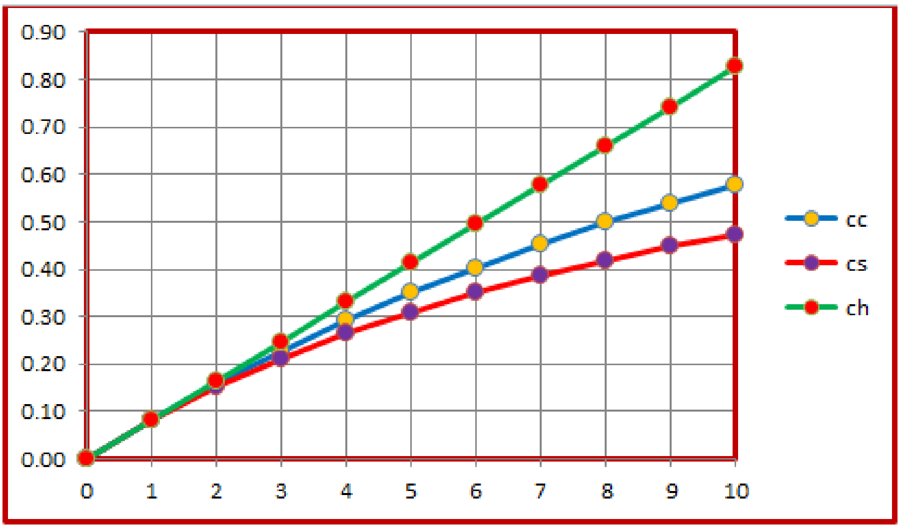
	D	E	F	G
41		cc	cs	ch
42	t	i_t	i_t	i_t
43	0	0.0000	0.0000	0.0000
44	1	0.0900	0.0900	0.0900
45	2	0.1881	0.1800	0.1978
46	3	0.2950	0.2700	0.3293
47	4	0.4116	0.3600	0.4932
48	5	0.5386	0.4500	0.7031
49	6	0.6771	0.5400	0.9818
50	7	0.8280	0.6300	1.3696
51	8	0.9926	0.7200	1.9459
52	9	1.1719	0.8100	2.8929
53	10	1.3674	0.9000	4.7368

	D	E	F	G
41		cc	cs	ch
42	t	i_t	i_t	i_t
43	0	=(1+B$1)^D43-1	=B$1*D43	=B$2*D43/(1-B$2*D43)
44	1	=(1+B$1)^D44-1	=B$1*D44	=B$2*D44/(1-B$2*D44)
45	2	=(1+B$1)^D45-1	=B$1*D45	=B$2*D45/(1-B$2*D45)



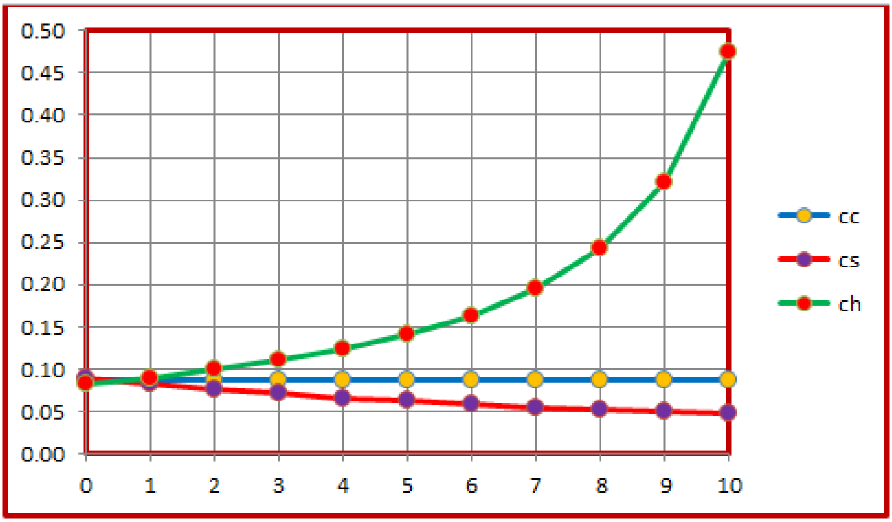
	D	E	F	G
61		*cc*	*cs*	*ch*
62	*t*	d_t	d_t	d_t
63	*0*	*0.0000*	*0.0000*	*0.0000*
64	*1*	*0.0826*	*0.0826*	*0.0826*
65	*2*	*0.1583*	*0.1525*	*0.1651*
66	*3*	*0.2278*	*0.2126*	*0.2477*
67	*4*	*0.2916*	*0.2647*	*0.3303*
68	*5*	*0.3501*	*0.3103*	*0.4128*
69	*6*	*0.4037*	*0.3506*	*0.4954*
70	*7*	*0.4530*	*0.3865*	*0.5780*
71	*8*	*0.4981*	*0.4186*	*0.6606*
72	*9*	*0.5396*	*0.4475*	*0.7431*
73	*10*	*0.5776*	*0.4737*	*0.8257*

	D	E	F	G
61		*cc*	*cs*	*ch*
62	*t*	d_t	d_t	d_t
63	*0*	*=1-(1-B$2)^D63*	*=B$1*D63/(1+B$1*D63)*	*=B$2*D63*
64	*1*	*=1-(1-B$2)^D64*	*=B$1*D64/(1+B$1*D64)*	*=B$2*D64*
65	*2*	*=1-(1-B$2)^D65*	*=B$1*D65/(1+B$1*D65)*	*=B$2*D65*



	D	E	F	G
81		*cc*	*cs*	*ch*
82	*t*	δ	δ_t	δ_t
83	*0*	*8.6178%*	*9.0000%*	*8.2569%*
84	*1*	*8.6178%*	*8.2569%*	*9.0000%*
85	*2*	*8.6178%*	*7.6271%*	*9.8901%*
86	*3*	*8.6178%*	*7.0866%*	*10.9756%*
87	*4*	*8.6178%*	*6.6176%*	*12.3288%*
88	*5*	*8.6178%*	*6.2069%*	*14.0625%*
89	*6*	*8.6178%*	*5.8442%*	*16.3636%*
90	*7*	*8.6178%*	*5.5215%*	*19.5652%*
91	*8*	*8.6178%*	*5.2326%*	*24.3243%*
92	*9*	*8.6178%*	*4.9724%*	*32.1429%*
93	*10*	*8.6178%*	*4.7368%*	*47.3684%*

	D	E	F	G
81		*cc*	*cs*	*ch*
82	*t*	δ	δ_t	δ_t
83	*0*	*=LN(1+B$1)*	*=B$1/(1+B$1*D83)*	*=B$2/(1-B$2*D83)*
84	*1*	*=LN(1+B$1)*	*=B$1/(1+B$1*D84)*	*=B$2/(1-B$2*D84)*
85	*2*	*=LN(1+B$1)*	*=B$1/(1+B$1*D85)*	*=B$2/(1-B$2*D85)*



Esercizio 1.11 (2) - Fattori di capitalizzazione (polinomiali)

$$(1+i)^t \simeq 1 + i\binom{t}{1} + i^2\binom{t}{2} + i^3\binom{t}{3} + \ldots + i^n\binom{t}{n} =$$

$$= 1 + i\,t + i^2\frac{t(t-1)}{2} + i^3\frac{t(t-1)(t-2)}{6} + \ldots + i^n\frac{t(t-1)\ldots(t-n+1)}{n!} =$$

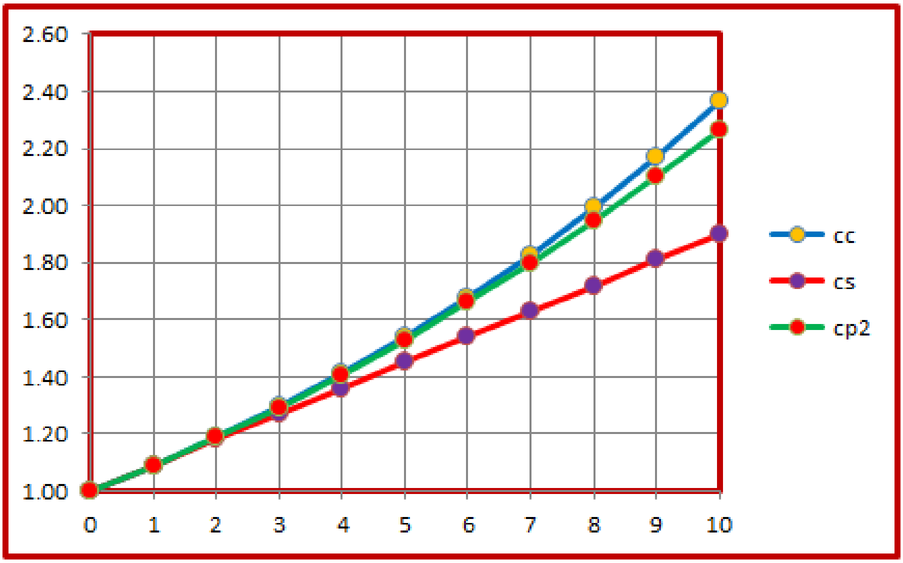
$$= 1 + i\,t\left(1 + i\frac{t-1}{2}\left(1 + i\frac{t-2}{3}\left(\ldots\left(1 + i\frac{t-n+1}{n}\right)\right)\right)\right)$$

	R	S	T	U	V	W	X	Y
1		0	1	2	3	4	5	6
2	k	1	2	3	4	5	6	7
3	t	t	...*(t-1)/2	...*(t-2)/3	...*(t-3)	...*(t-4)	...*(t-5)	...*(t-6)
4	0	0	0	0	0	0	0	0
5	1	1	0	0	0	0	0	0
6	2	2	1	0	0	0	0	0
7	3	3	3	1	0	0	0	0
8	4	4	6	4	1	0	0	0
9	5	5	10	10	5	1	0	0
10	6	6	15	20	15	6	1	0
11	7	7	21	35	35	21	7	1
12	8	8	28	56	70	56	28	8
13	9	9	36	84	126	126	84	36
14	10	10	45	120	210	252	210	120

	R	S	T	U
1		0	1	2
2	k	1	2	3
3	t	t	...*(t-1)/2	...*(t-2)/3
4	0	=R4	=S4*($S4-T$1)/T$2	=T4*($S4-U$1)/U$2
5	1	=R5	=S5*($S5-T$1)/T$2	=T5*($S5-U$1)/U$2
6	2	=R6	=S6*($S6-T$1)/T$2	=T6*($S6-U$1)/U$2

	R	S	T	U	V	W	X	Y
16	cc	cs	cp2	cp3	cp4	cp5	cp6	cp7
17	r_t	r_t	r_t	r_t	r_t	r_t	r_t	r_t
18	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
19	1.0900	1.0900	1.0900	1.0900	1.0900	1.0900	1.0900	1.0900
20	1.1881	1.1800	1.1881	1.1881	1.1881	1.1881	1.1881	1.1881
21	1.2950	1.2700	1.2943	1.2950	1.2950	1.2950	1.2950	1.2950
22	1.4116	1.3600	1.4086	1.4115	1.4116	1.4116	1.4116	1.4116
23	1.5386	1.4500	1.5310	1.5383	1.5386	1.5386	1.5386	1.5386
24	1.6771	1.5400	1.6615	1.6761	1.6771	1.6771	1.6771	1.6771
25	1.8280	1.6300	1.8001	1.8256	1.8279	1.8280	1.8280	1.8280
26	1.9926	1.7200	1.9468	1.9876	1.9922	1.9925	1.9926	1.9926
27	2.1719	1.8100	2.1016	2.1628	2.1711	2.1718	2.1719	2.1719
28	2.3674	1.9000	2.2645	2.3520	2.3658	2.3672	2.3674	2.3674

	R	S	T	U
16	cc	cs	cp2	cp3
17	r_t	r_t	r_t	r_t
18	=E3	=1+S4*$B$1	=S18+T4*$B$1^T$2	=T18+U4*$B$1^U$2
19	=E4	=1+S5*$B$1	=S19+T5*$B$1^T$2	=T19+U5*$B$1^U$2
20	=E5	=1+S6*$B$1	=S20+T6*$B$1^T$2	=T20+U6*$B$1^U$2



Esercizio 1.11 (3) - Acquisto progressivo di titoli

Un individuo dispone di un capitale C e al tempo iniziale 0 acquista titoli fruttiferi scadenti al tempo T, di importo nominale P, quotati al corso unitario di mercato Q_0 e caratterizzati da cedole annuali al tasso i_1, depositando l'eventuale rimanenza in un c/c bancario caratterizzato da un tasso annuo costante g ($<i_1$)

In ciascuno dei tempi t = 1,2,...,T-1, con il ricavato delle cedole più il saldo del c/c bancario, l'individuo acquista altri titoli della stessa specie e scadenza ai diversi corsi unitari di mercato $Q_{t=1,2,\ldots,T-1}$, depositando l'eventuale rimanenza nel c/c. Infine, al tempo finale T l'individuo versa nel c/c il ricavo dei titoli e le ultime cedole.

Si chiede di determinare:

- ***il numero dei titoli acquistati in ognuno dei tempi t = 0,1,2...T-1,***
- ***il saldo del c/c bancario in ciascuno dei tempi t = 0,1,2,...,T-1,T, dopo aver effettuato le dovute operazioni.***

Ipotizzando, con riferimento al rendimento dei titoli, la possibilità che il tasso sia variabile $i_{t=1,2,\ldots,T}$, si risponda ai quesiti precedenti.

Si considerino i seguenti dati (variabili), come ipotesi di lavoro:

- ***Capitale*** — $C = 10000$
- ***Scadenza dei titoli*** — $T = 5$ ***(fisso)***
- ***Importo nominale*** — $P = 500$
- ***Corso del tempo iniziale*** — $Q_0 = 0.90$
- ***Corsi degli anni successivi*** — $Q_{t=1,2,\ldots,T-1} = 0.95, 0.96, 0.97, 0.98$
- ***Tassi dei titoli*** — $i_1 = 10\%$
  $i_{t=2,3,\ldots,T} = 11\%, 12\%, 13\%, 14\%$
- ***Tasso bancario*** — $g = 5\%$
- ***Caso di studio*** — $Sw = 1,2$

- ***Tassi e prezzi dei titoli***

$$\boxed{\prod_{s=1}^{T} \hat{i}_s = i_1 \cdot (Sw = 1) + i_s \cdot (Sw = 2)} \qquad \boxed{\prod_{s=0}^{T-1} P_s = P \cdot Q_s}$$

- ***Disponibilità iniziale***

$$\boxed{D_0 = C}$$

- ***Numero titoli acquistati e posseduti al tempo iniziale***

$$\boxed{M_0 = N_0 = int\left(\frac{D_0}{P_0}\right)}$$

- ***Saldo del c/c bancario al tempo iniziale***

$$\boxed{S_0 = D_0 - N_0 \cdot P_0}$$

- ***Disponibilità successive***

$$\boxed{\prod_{s=1}^{T} D_s = S_{s-1} \cdot (1 + g) + M_{s-1} \cdot P \cdot \hat{i}_s}$$

- ***Numero titoli acquistati ai tempi successivi***

$$\boxed{\prod_{s=1}^{T-1} N_s = int\left(\frac{D_s}{P_s}\right)}$$

- ***Numero titoli posseduti ai tempi successivi***

$$\boxed{\prod_{s=1}^{T-1} M_s = M_{s-1} + N_s}$$

- ***Saldo del c/c bancario ai tempi successivi***

$$\boxed{\mathop{\square}_{s=1}^{T-1} S_s = D_s - N_s \cdot P_s}$$

- ***Saldo del c/c bancario al tempo finale***

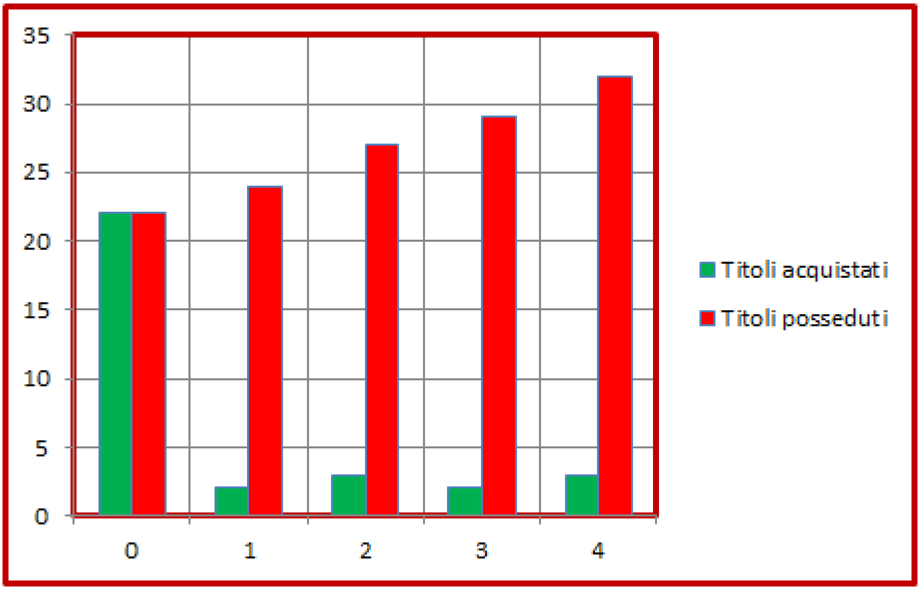
$$\boxed{S_T = D_T + M_{T-1} \cdot P}$$

	AD	AE	AF
1	Capitale	C	10000
2	Tempo iniziale		0
3	Tempo finale	T	5
4	Importo nominale	P	500
5			0.90
6			0.95
7	Corsi titoli	Q_t	0.96
8			0.97
9			0.98
10			10.00%
11			11.00%
12	Tassi titoli	i_t	12.00%
13			13.00%
14			14.00%
15	Tasso bancario	g	5.00%
16	Caso di studio	Sw	1

	AH	AI	AJ	AK	AL	AM	AN
1	Anni	Tassi	Prezzi	Dispon	NumTit	CumTit	S/Banca
2	0		450.00	10000.00	22	22	100.00
3	1	10.00%	475.00	1205.00	2	24	255.00
4	2	10.00%	480.00	1467.75	3	27	27.75
5	3	10.00%	485.00	1379.14	2	29	409.14
6	4	10.00%	490.00	1879.59	3	32	409.59
7	5	10.00%		2030.07			18030.07

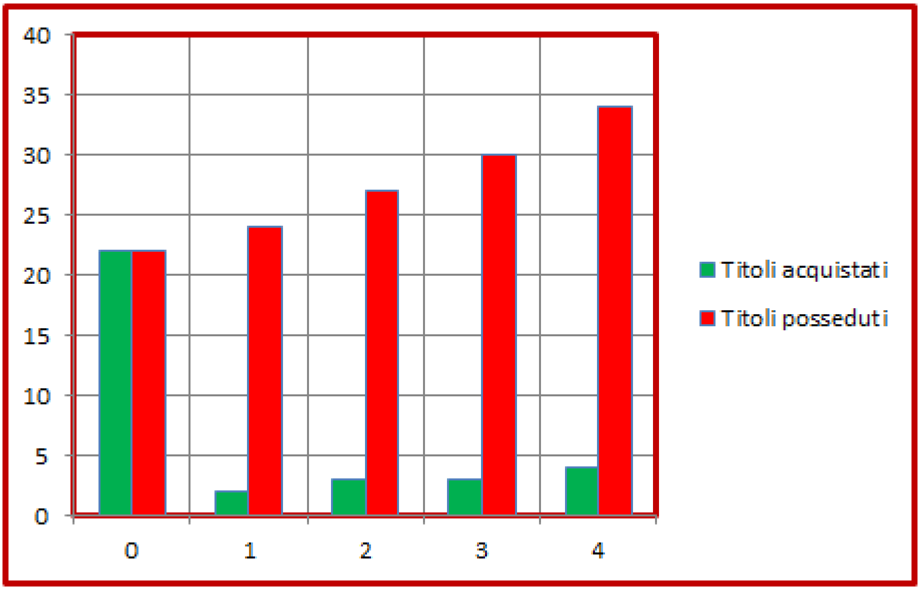
	AH	AI	AJ
1	*Anni*	*Tassi*	*Prezzi*
2	*0*		*=AF$4*AF5*
3	*=AH2+1*	*=AF$10*(AF$16=1)+AF10*(AF$16=2)*	*=AF$4*AF6*
4	*=AH3+1*	*=AF$10*(AF$16=1)+AF11*(AF$16=2)*	*=AF$4*AF7*
5	*=AH4+1*	*=AF$10*(AF$16=1)+AF12*(AF$16=2)*	*=AF$4*AF8*
6	*=AH5+1*	*=AF$10*(AF$16=1)+AF13*(AF$16=2)*	*=AF$4*AF9*
7	*=AH6+1*	*=AF$10*(AF$16=1)+AF14*(AF$16=2)*	

	AK	AL	AM	AN
1	*Dispon*	*NumTit*	*CumTit*	*S/Banca*
2	*=AF1*	*=INT(AK2/AJ2)*	*=AL2*	*=AK2-AL2*AJ2*
3	*=AN2*(1+AF$15)+AM2*AF$4*AI2*	*=INT(AK3/AJ3)*	*=AM2+AL3*	*=AK3-AL3*AJ3*
4	*=AN3*(1+AF$15)+AM3*AF$4*AI3*	*=INT(AK4/AJ4)*	*=AM3+AL4*	*=AK4-AL4*AJ4*
5	*=AN4*(1+AF$15)+AM4*AF$4*AI4*	*=INT(AK5/AJ5)*	*=AM4+AL5*	*=AK5-AL5*AJ5*
6	*=AN5*(1+AF$15)+AM5*AF$4*AI5*	*=INT(AK6/AJ6)*	*=AM5+AL6*	*=AK6-AL6*AJ6*
7	*=AN6*(1+AF$15)+AM6*AF$4*AI6*			*=AK7+AM6*AF4*



	AD	AE	AF
16	*Caso di studio*	*Sw*	*2*

	AH	AI	AJ	AK	AL	AM	AN
1	*Anni*	*Tassi*	*Prezzi*	*Dispon*	*NumTit*	*CumTit*	*S/Banca*
2	0		450.00	10000.00	22	22	100.00
3	1	10.00%	475.00	1205.00	2	24	255.00
4	2	11.00%	480.00	1587.75	3	27	147.75
5	3	12.00%	485.00	1775.14	3	30	320.14
6	4	13.00%	490.00	2286.14	4	34	326.14
7	5	14.00%		2722.45			19722.45



Ipotizzando che l'individuo possa acquistare un ulteriore titolo anche in eccedenza rispetto alla sua disponibilità, prelevando dal c/c bancario in base ad un tasso annuo costante per saldi debitori h ($>i_{t=1,2,\ldots,t}$), il problema si modifica nel modo seguente:

- ***Tasso bancario debitore*** ***h=15%***

- ***Numero titoli acquistati e posseduti al tempo iniziale***

$$N_0 = int\left(\frac{D_0}{P_0}\right)$$

$$N_0^+ = ((P\,\hat{i}_1 - (D_0 - N_0 \cdot P_0) \cdot g - (P_0 - (D_0 - N_0 \cdot P_0)) \cdot h) > 0) \qquad M_0 = N_0 + N_0^+$$

- ***Saldo del c/c bancario al tempo iniziale***

$$S_0 = D_0 - (N_0 + N_0^+) \cdot P_0$$

- ***Disponibilità successive***

$$\mathop{\Box}\limits_{s=1}^{T} f_s = g \cdot (S_{s-1} \geq 0) + h \cdot (S_{s-1} < 0) \qquad \mathop{\Box}\limits_{s=1}^{T} D_s = S_{s-1} \cdot (1 + f_s) + M_{s-1} \cdot P \cdot \hat{i}_s$$

- ***Numero titoli acquistati ai tempi successivi***

$$\mathop{\Box}\limits_{s=1}^{T-1} N_s = int\left(\frac{D_s}{P_s}\right)$$

$$\mathop{\Box}\limits_{s=1}^{T-1} N_s^+ = ((P\,\hat{i}_{s+1} - (D_s - N_s \cdot P_s) \cdot g - (P_s - (D_s - N_s \cdot P_s)) \cdot h) > 0)$$

- ***Numero titoli posseduti ai tempi successivi***

$$\mathop{\Box}\limits_{s=1}^{T-1} M_s = M_{s-1} + N_s + N_s^+$$

- ***Saldo del c/c bancario ai tempi successivi***

$$\mathop{\Box}\limits_{s=1}^{T-1} S_s = D_s - (N_s + N_s^+) \cdot P_s$$

	AP	AQ	AR	AS
15	Tasso bancario	g	5.00%	15.00%
16	Caso di studio	Sw	1	

	AT	AU	AV	AW	AX	AY	AZ	BA	BB
1	Anni	Tassi	Prezzi	Dispon	NumTit	PlusTit	CumTit	S/Banca	Tax Banca
2	0		450.00	10000.00	22	0	22	100.00	
3	1	10.00%	475.00	1205.00	2	1	25	-220.00	5.0%
4	2	10.00%	480.00	997.00	2	0	27	37.00	15.0%
5	3	10.00%	485.00	1388.85	2	1	30	-66.15	5.0%
6	4	10.00%	490.00	1423.93	2	1	33	-46.07	15.0%
7	5	10.00%		1597.02				18097.02	15.0%

	AT	AU	AV
1	Anni	Tassi	Prezzi
2	0		=AR$4*AR5
3	=AT2+1	=AR$10*(AR$16=1)+AR10*(AR$16=2)	=AR$4*AR6
4	=AT3+1	=AR$10*(AR$16=1)+AR11*(AR$16=2)	=AR$4*AR7
5	=AT4+1	=AR$10*(AR$16=1)+AR12*(AR$16=2)	=AR$4*AR8
6	=AT5+1	=AR$10*(AR$16=1)+AR13*(AR$16=2)	=AR$4*AR9
7	=AT6+1	=AR$10*(AR$16=1)+AR14*(AR$16=2)	

	AW	AX
1	Dispon	NumTit
2	=AR1	=INT(AW2/AV2)
3	=BA2*(1+BB3)+AZ2*AR$4*AU3	=INT(AW3/AV3)
4	=BA3*(1+BB4)+AZ3*AR$4*AU4	=INT(AW4/AV4)
5	=BA4*(1+BB5)+AZ4*AR$4*AU5	=INT(AW5/AV5)
6	=BA5*(1+BB6)+AZ5*AR$4*AU6	=INT(AW6/AV6)
7	=BA6*(1+BB7)+AZ6*AR$4*AU7	

	AY
1	PlusTit
2	=((AR$4*AU3-(AW2-AX2*AV2)*AR$15-(AV2-(AW2-AX2*AV2))*AS$15)>0)*1
3	=((AR$4*AU4-(AW3-AX3*AV3)*AR$15-(AV3-(AW3-AX3*AV3))*AS$15)>0)*1
4	=((AR$4*AU5-(AW4-AX4*AV4)*AR$15-(AV4-(AW4-AX4*AV4))*AS$15)>0)*1
5	=((AR$4*AU6-(AW5-AX5*AV5)*AR$15-(AV5-(AW5-AX5*AV5))*AS$15)>0)*1
6	=((AR$4*AU7-(AW6-AX6*AV6)*AR$15-(AV6-(AW6-AX6*AV6))*AS$15)>0)*1

	AZ	BA	BB
1	CumTit	S/Banca	Tax Banca
2	=AX2+AY2	=AW2-(AX2+AY2)*AV2	
3	=AZ2+AX3+AY3	=AW3-(AX3+AY3)*AV3	=AR$15*(BA2>=0)+AS$15*(BA2<0)
4	=AZ3+AX4+AY4	=AW4-(AX4+AY4)*AV4	=AR$15*(BA3>=0)+AS$15*(BA3<0)
5	=AZ4+AX5+AY5	=AW5-(AX5+AY5)*AV5	=AR$15*(BA4>=0)+AS$15*(BA4<0)
6	=AZ5+AX6+AY6	=AW6-(AX6+AY6)*AV6	=AR$15*(BA5>=0)+AS$15*(BA5<0)
7		=AW7+AZ6*AR4	=AR$15*(BA6>=0)+AS$15*(BA6<0)

	AP	AQ	AR
16	Caso di studio	Sw	2

	AT	AU	AV	AW	AX	AY	AZ	BA	BB
1	Anni	Tassi	Prezzi	Dispon	NumTit	PlusTit	CumTit	S/Banca	Tax Banca
2	0		450.00	10000.00	22	0	22	100.00	
3	1	10.00%	475.00	1205.00	2	1	25	-220.00	5.0%
4	2	11.00%	480.00	1122.00	2	1	28	-318.00	15.0%
5	3	12.00%	485.00	1314.30	2	1	31	-140.70	15.0%
6	4	13.00%	490.00	1853.20	3	1	35	-106.81	15.0%
7	5	14.00%		2327.17				19827.17	15.0%

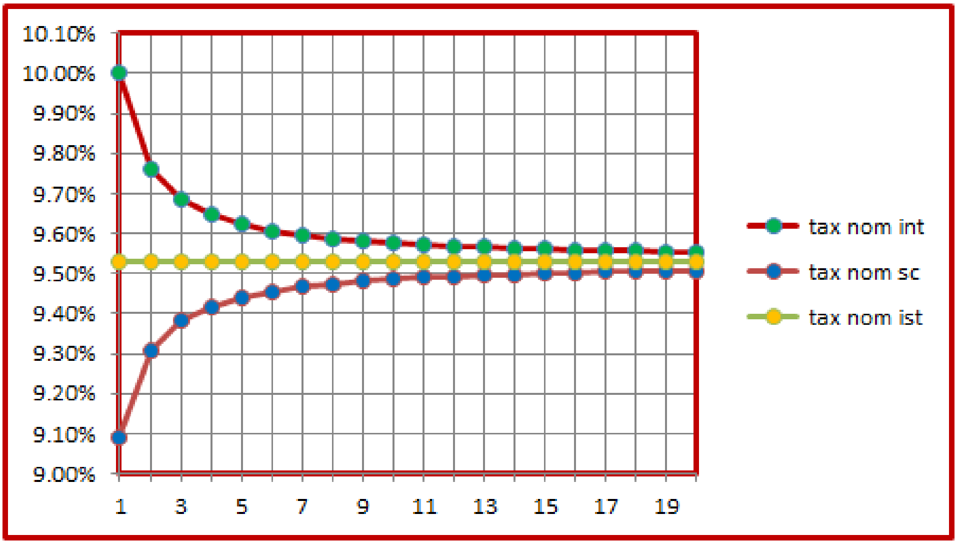
Esercizio 1.12 (1) - Tassi nominali da tassi effettivi >>>

Calcolo dei tassi nominali d'interesse, dei tassi nominali di sconto ed intensità istantanea (d'interesse e/o di sconto) equivalenti ad un tasso effettivo d'interesse assegnato

$$\left.\begin{aligned} j_m &= m\, i_{\frac{1}{m}} = m\left((1+i)^{\frac{1}{m}} - 1\right) \\ \rho_m &= m\, d_{\frac{1}{m}} = m\left(1-(1-d)^{\frac{1}{m}}\right) \end{aligned}\right\} \qquad \delta = \begin{cases} lg(1+i) \\ -lg(1-d) \end{cases}$$

	A	B	C	D
1		*i*	*d*	
2	Tasso	10.0000%	9.0909%	
3		Valori esatti		
4	m	j(m)	ρ (m)	δ
5	1	10.0000%	9.0909%	9.5310%
6	2	9.7618%	9.3075%	9.5310%
7	3	9.6840%	9.3812%	9.5310%
8	4	9.6455%	9.4184%	9.5310%
9	5	9.6224%	9.4408%	9.5310%
10	6	9.6071%	9.4557%	9.5310%
11	7	9.5962%	9.4664%	9.5310%
12	8	9.5880%	9.4745%	9.5310%
13	9	9.5817%	9.4807%	9.5310%
14	10	9.5766%	9.4857%	9.5310%
15	11	9.5724%	9.4898%	9.5310%
16	12	9.5690%	9.4933%	9.5310%
17	13	9.5660%	9.4962%	9.5310%
18	14	9.5635%	9.4986%	9.5310%
19	15	9.5614%	9.5008%	9.5310%
20	16	9.5595%	9.5027%	9.5310%
21	17	9.5578%	9.5044%	9.5310%
22	18	9.5563%	9.5058%	9.5310%
23	19	9.5550%	9.5072%	9.5310%
24	20	9.5538%	9.5083%	9.5310%
25				
26	999	9.5315%	9.5306%	9.5310%

	A	B	C	D
1		*i*	*d*	
2	Tasso	0.1	=B2/(1+B2)	
3		Valori esatti		
4	m	j(m)	ρ (m)	δ
5	1	=A5*((1+B$2)^(1/A5)-1)	=A5*(1-(1-C$2)^(1/A5))	=LN(1+B$2)
6	2	=A6*((1+B$2)^(1/A6)-1)	=A6*(1-(1-C$2)^(1/A6))	=LN(1+B$2)
7	3	=A7*((1+B$2)^(1/A7)-1)	=A7*(1-(1-C$2)^(1/A7))	=LN(1+B$2)



Esercizio 1.12 (2) - Tassi nominali da tassi nominali >>>

Calcolo di tassi nominali d'interesse j_m da analoghi tassi nominali d'interesse j_n con diversa convertibilità

Nota: per i tipi di convertibilità sono stati scelti quelli tipici relativi a frazionamento dell'anno e cioè semestrale (2), quadrimestrale (3), trimestrale (4), bimestrale (6) e mensile (12) e istantaneo (999)

	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
1	Tasso		10%						
2		n	1	2	3	4	6	12	999
3	m		$j_1=i$	j_2	j_3	j_4	j_6	j_{12}	j_∞
4	1	$j_1=i$	10.0000%	10.2500%	10.3370%	10.3813%	10.4260%	10.4713%	10.5165%
5	2	j_2	9.7618%	10.0000%	10.0829%	10.1250%	10.1676%	10.2107%	10.2537%
6	3	j_3	9.6840%	9.9185%	10.0000%	10.0414%	10.0833%	10.1257%	10.1680%
7	4	j_4	9.6455%	9.8780%	9.9589%	10.0000%	10.0416%	10.0836%	10.1255%
8	6	j_6	9.6071%	9.8378%	9.9180%	9.9588%	10.0000%	10.0417%	10.0833%
9	12	j_{12}	9.5690%	9.7978%	9.8774%	9.9178%	9.9587%	10.0000%	10.0413%
10	999	j_∞	9.5315%	9.7585%	9.8374%	9.8775%	9.9181%	9.9591%	10.0000%

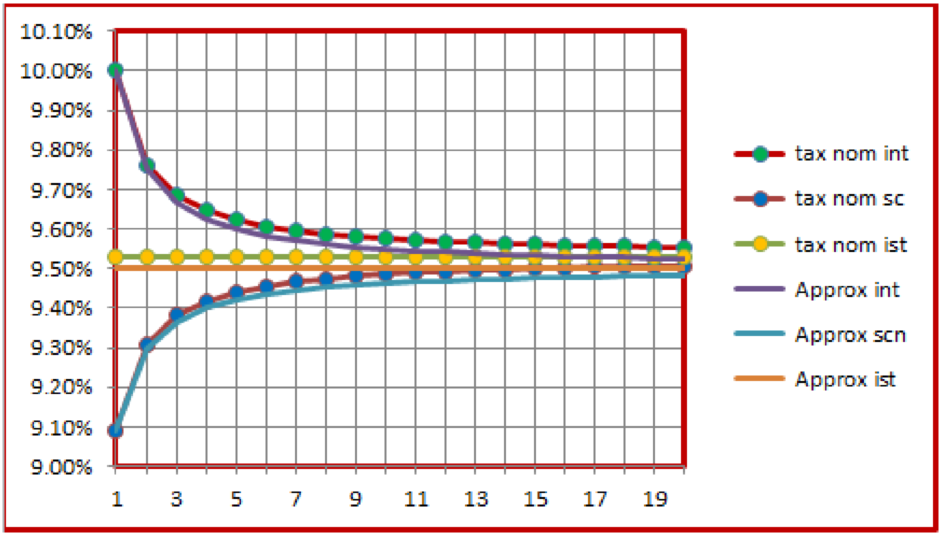
	J	K	L	M
1	Tasso		0.1	
2		n	1	2
3	m		$j_1=i$	j_2
4	1	$j_1=i$	=$J4*((1+$L$1/L$2)^(L$2/$J4)-1)	=$J4*((1+$L$1/M$2)^(M$2/$J4)-1)
5	2	j_2	=$J5*((1+$L$1/L$2)^(L$2/$J5)-1)	=$J5*((1+$L$1/M$2)^(M$2/$J5)-1)
6	3	j_3	=$J6*((1+$L$1/L$2)^(L$2/$J6)-1)	=$J6*((1+$L$1/M$2)^(M$2/$J6)-1)

Esercizio 1.12 (3) - Tassi nominali (appross.) da tassi effettivi >>>

Calcolo dei tassi nominali d'interesse e di sconto e intensità istantanea (tramite formule approssimate) equivalenti ad un tasso effettivo assegnato e confronto con le formule esatte

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		*i*	*d*					
2	Tasso	10.0000%	9.0909%					
3		Valori esatti			Valori approx			
4	m	j(m)	ρ (m)	δ	j(m)	ρ (m)	δ(i)	δ(d)
5	1	10.0000%	9.0909%	9.5310%	10.0000%	9.0909%	9.5000%	9.5041%
6	2	9.7618%	9.3075%	9.5310%	9.7500%	9.2975%	9.5000%	9.5041%
7	3	9.6840%	9.3812%	9.5310%	9.6667%	9.3664%	9.5000%	9.5041%
8	4	9.6455%	9.4184%	9.5310%	9.6250%	9.4008%	9.5000%	9.5041%
9	5	9.6224%	9.4408%	9.5310%	9.6000%	9.4215%	9.5000%	9.5041%
10	6	9.6071%	9.4557%	9.5310%	9.5833%	9.4353%	9.5000%	9.5041%
11	7	9.5962%	9.4664%	9.5310%	9.5714%	9.4451%	9.5000%	9.5041%
12	8	9.5880%	9.4745%	9.5310%	9.5625%	9.4525%	9.5000%	9.5041%
13	9	9.5817%	9.4807%	9.5310%	9.5556%	9.4582%	9.5000%	9.5041%
14	10	9.5766%	9.4857%	9.5310%	9.5500%	9.4628%	9.5000%	9.5041%
15	11	9.5724%	9.4898%	9.5310%	9.5455%	9.4666%	9.5000%	9.5041%
16	12	9.5690%	9.4933%	9.5310%	9.5417%	9.4697%	9.5000%	9.5041%
17	13	9.5660%	9.4962%	9.5310%	9.5385%	9.4723%	9.5000%	9.5041%
18	14	9.5635%	9.4986%	9.5310%	9.5357%	9.4746%	9.5000%	9.5041%
19	15	9.5614%	9.5008%	9.5310%	9.5333%	9.4766%	9.5000%	9.5041%
20	16	9.5595%	9.5027%	9.5310%	9.5313%	9.4783%	9.5000%	9.5041%
21	17	9.5578%	9.5044%	9.5310%	9.5294%	9.4798%	9.5000%	9.5041%
22	18	9.5563%	9.5058%	9.5310%	9.5278%	9.4812%	9.5000%	9.5041%
23	19	9.5550%	9.5072%	9.5310%	9.5263%	9.4824%	9.5000%	9.5041%
24	20	9.5538%	9.5083%	9.5310%	9.5250%	9.4835%	9.5000%	9.5041%
25								
26	999	9.5315%	9.5306%	9.5310%	9.5005%	9.5037%	9.5000%	9.5041%

	E	F	G	H
1				
2				
3	Valori approx			
4	j(m)	ρ (m)	δ(i)	δ(d)
5	=B$2*(1-B$2*(A5-1)/(2*A5))	=C$2*(1+$C$2*(A5-1)/(2*A5))	=B$2*(1-B$2/2)	=C$2*(1+C$2/2)
6	=B$2*(1-B$2*(A6-1)/(2*A6))	=C$2*(1+$C$2*(A6-1)/(2*A6))	=B$2*(1-B$2/2)	=C$2*(1+C$2/2)
7	=B$2*(1-B$2*(A7-1)/(2*A7))	=C$2*(1+$C$2*(A7-1)/(2*A7))	=B$2*(1-B$2/2)	=C$2*(1+C$2/2)



Esercizio 1.12 (4) - Tassi nominali (appross.) da tassi nominali >>>

Calcolo di tassi nominali (approssimati) d'interesse da analoghi tassi nominali d'interesse con diversa convertibilità

	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
12	Tasso		10%						
13		n	1	2	3	4	6	12	999
14	m		$j_1=i$	j_2	j_3	j_4	j_6	j_{12}	j_∞
15	1	$j_1=i$	10.0000%	10.2500%	10.3333%	10.3750%	10.4167%	10.4583%	10.4995%
16	2	j_2	9.7500%	10.0000%	10.0833%	10.1250%	10.1667%	10.2083%	10.2495%
17	3	j_3	9.6667%	9.9167%	10.0000%	10.0417%	10.0833%	10.1250%	10.1662%
18	4	j_4	9.6250%	9.8750%	9.9583%	10.0000%	10.0417%	10.0833%	10.1245%
19	6	j_6	9.5833%	9.8333%	9.9167%	9.9583%	10.0000%	10.0417%	10.0828%
20	12	j_{12}	9.5417%	9.7917%	9.8750%	9.9167%	9.9583%	10.0000%	10.0412%
21	999	j_∞	9.5005%	9.7505%	9.8338%	9.8755%	9.9172%	9.9588%	10.0000%

	J	K	L	M
12	Tasso		0.1	
13		n	1	2
14	m		$j_1=i$	j_2
15	1	$j_1=i$	=$L$12*(1+((L$13-$J15)/(2*$J15*L$13))*$L$12)	=$L$12*(1+((M$13-$J15)/(2*$J15*M$13))*$L$12)
16	2	j_2	=$L$12*(1+((L$13-$J16)/(2*$J16*L$13))*$L$12)	=$L$12*(1+((M$13-$J16)/(2*$J16*M$13))*$L$12)
17	3	j_3	=$L$12*(1+((L$13-$J17)/(2*$J17*L$13))*$L$12)	=$L$12*(1+((M$13-$J17)/(2*$J17*M$13))*$L$12)

Esercizio 1.12 (5) - Calcolo di montanti >>>

- *Calcolare il montante di € 1000 per 2 anni e 3 mesi al tasso annuo nominale (m = 2) d'interesse del 5.75%*
- *Calcolare il montante di € 2000 per 3 anni e 9 mesi al tasso annuo nominale (m = 3) di sconto del 4.30%*
- *Calcolare il montante di € 3000 per 4 anni e 6 mesi in base al tasso istantaneo d'interesse del 3.50%*

$$M_t = 1000 \cdot (1 + \frac{0.0575}{2})^{2 \cdot 2.25} = 1000 \cdot (1 + \underbrace{0.05832656}_{i=(1+\frac{0.0575}{2})^2 - 1})^{2.25}$$

$$M_t = 2000 \cdot (1 - \frac{0.043}{3})^{-3 \cdot 3.75} = 2000 \cdot (1 - \underbrace{0.04238661}_{d=1-(1-\frac{0.043}{3})^3})^{-3.75}$$

$$M_t = 3000 \cdot e^{0.035 \cdot 4.50} = 3000 \cdot (1 + \underbrace{0.03561971}_{i=e^{0.035}-1})^{4.50}$$

	T	U	V	W	X	Y	Z
1	P_0	j_m	m	t	M_t	i	M_t
2	1000.00	5.75%	2	2.25	1136.04	5.832656%	1136.04
3	P_0	ρ_m	m	t	M_t	d	M_t
4	2000.00	4.30%	3	3.75	2352.70	4.238661%	2352.70
5	P_0	δ		t	M_t	i	M_t
6	3000.00	3.50%		4.50	3511.74	3.561971%	3511.74

	T	U	V	W	X	Y	Z
1	P_0	j_m	m	t	M_t	i	M_t
2	1000	0.0575	2	2.25	=T2*(1+U2/V2)^(V2*W2)	=(1+U2/V2)^V2-1	=T2*(1+Y2)^W2
3	P_0	ρ_m	m	t	M_t	d	M_t
4	2000	0.043	3	3.75	=T4*(1-U4/V4)^-(V4*W4)	=1-(1-U4/V4)^V4	=T4*(1-Y4)^-W4
5	P_0	δ		t	M_t	i	M_t
6	3000	0.035		4.5	=T6*EXP(U6*W6)	=EXP(U6)-1	=T6*(1+Y6)^W6

$$M_t \simeq 1000 \cdot (1 + \underbrace{0.05832656}_{i \simeq 0.0575\,(1+\frac{1}{4}0.0575)})^{2.25}$$

$$M_t \simeq 2000 \cdot (1 - \underbrace{0.04238367}_{d \simeq 0.043\,(1-\frac{2}{6}0.043)})^{-3.75}$$

$$M_t \simeq 3000 \cdot (1 + \underbrace{0.03561250}_{i \simeq 0.035\,(1+\frac{0.035}{2})})^{4.50}$$

	AA	AB
1	*i*	M_t
2	5.832656%	1136.04
3	*d*	M_t
4	4.238367%	2352.67
5	*i*	M_t
6	3.561250%	3511.63

	AA	AB
1	*i*	M_t
2	=U2*(1+(V2-1)/(2*V2)*U2)	=T2*(1+AA2)^W2
3	*d*	M_t
4	=U4*(1-(V4-1)/(2*V4)*U4)	=T4*(1-AA4)^-W4
5	*i*	M_t
6	=U6*(1+U6/2)	=T6*(1+AA6)^W6

Esercizio 1.12 (6) - Calcolo di valori attuali >>>

- ***Calcolare il valore attuale di € 6000 per 1 anni e 3 mesi al tasso annuo nominale (m = 4) d'interesse del 3.75%***
- ***Calcolare il valore attuale di € 5000 per 2 anni e 6 mesi al tasso annuo nominale (m = 6) di sconto del 2.70%***
- ***Calcolare il valore attuale di € 4000 per 7 anni e 9 mesi in base al tasso istantaneo di sconto costante del 2.50%***

$$P_0 = 6000 \cdot (1 + \frac{0.0375}{4})^{-4 \cdot 1.25} = 6000 \cdot (1 + \underbrace{0.03803065}_{i=(1+\frac{0.0375}{4})^4-1})^{-1.25}$$

$$P_0 = 5000 \cdot (1 - \frac{0.027}{6})^{6 \cdot 2.50} = 5000 \cdot (1 - \underbrace{0.02669807}_{d=1-(1-\frac{0.027}{6})^6})^{2.50}$$

$$P_0 = 4000 \cdot e^{-0.025 \cdot 7.75} = 4000 \cdot (1 - \underbrace{0.02469009}_{d=1+e^{-0.025}})^{7.75}$$

	T	U	V	W	X	Y	Z
8	M_t	i	m	t	P_0	i	P_0
9	6000.00	3.75%	4	1.25	5726.49	3.803065%	5726.49
10	M_t	d	m	t	P_0	d	P_0
11	5000.00	2.70%	6	2.50	4672.93	2.669807%	4672.93
12	M_t	δ		t	P_0	d	P_0
13	4000.00	2.50%		7.75	3295.46	2.469009%	3295.46

	T	U	V	W	X	Y	Z
8	M_t	i	m	t	P_0	i	P_0
9	6000	0.0375	4	1.25	=T9*(1+U9/V9)^-(V9*W9)	=(1+U9/V9)^V9-1	=T9*(1+Y9)^-W9
10	M_t	d	m	t	P_0	d	P_0
11	5000	0.027	6	2.5	=T11*(1-U11/V11)^(V11*W11)	=1-(1-U11/V11)^V11	=T11*(1-Y11)^W11
12	M_t	δ		t	P_0	d	P_0
13	4000	0.025		7.75	=T13*EXP(-U13*W13)	=1-EXP(-U13)	=T13*(1-Y13)^W13

	AB	AC	AD	AE
21	M_t	i	t	D_t
22	8000	0.0475	1.5	=AB22*(1-(1+AC22)^-AD22)
23	M_t	d	t	D_t
24	7800	0.017	3.5	=AB24*(1-(1-AC24)^AD24)
25	M_t	δ	t	D_t
26	6700	0.0075	6	=AB26*(1-EXP(-AC26*AD26))

Esercizio 1.12 (7) - Calcolo di tassi di interesse e di sconto >>>

- ***Calcolare il tasso annuo nominale d'interesse (m = 12) (e di sconto (m = 24)) relativamente ad un'operazione caratterizzata da:***
  - ***importo iniziale di € 18000,***
  - ***importo finale di € 20000,***
  - ***durata di 5 anni e 9 mesi***

$$j_{12} = 12 \cdot \left(\left(\frac{20000}{18000} \right)^{\frac{1}{12 \cdot 5.75}} - 1 \right) \quad , \quad \rho_{24} = 24 \cdot \left(1 - \left(\frac{18000}{20000} \right)^{\frac{1}{24 \cdot 5.75}} \right)$$

	AD	AE	AF	AG	AH	AI	AJ	AK
1	P_0	M_t	t	m	j_m	m	ρ_m	δ
2	18000.00	20000.00	5.75	12	1.8338%	24	1.8317%	1.8324%

	AD	AE	AF	AG	AH
1	P_0	M_t	t	m	j_m
2	18000	20000	5.75	12	=AG2*((AE2/AD2)^(1/(AG2*AF2))-1)

	AI	AJ	AK
1	m	ρ_m	δ
2	24	=AI2*(1-(AD2/AE2)^(1/(AI2*AF2)))	=(LN(AE2)-LN(AD2))/AF2

Esercizio 1.12 (8) - Calcolo del tempo >>>

- ***Determinare in quanto tempo un capitale di € 10000 genera un montante di € 15000 al tasso annuo nominale d'interesse e di sconto (m = 360, 52, 24, 12, 6, 4, 3, 2, 1, 1/2, 1/4) del 12.50%***

$$t = \frac{lg\,15000 - lg\,10000}{m\,lg\left(1 + \frac{0.125}{m}\right)} \quad , \quad t = \frac{lg\,15000 - lg\,10000}{-m\,lg\left(1 - \frac{0.125}{m}\right)}$$

$$m = 360, 52, 24, 12, 6, 4, 3, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$$

	AD	AE	AF	AG	AH	AI
4	P_0	M_t	i	m	$t\ (j_m)$	$t\ (\rho_m)$
5	10000.00	15000.00	12.50%	360	3.24	3.24
6				52	3.25	3.24
7				24	3.25	3.24
8				12	3.26	3.23
9				6	3.28	3.21
10				4	3.29	3.19
11				3	3.31	3.18
12				2	3.34	3.14
13				1	3.44	3.04
14				0.50	3.63	2.82
15				0.25	4.00	2.34

	AD	AE	AF	AG	AH
4	P_0	M_t	i	m	$t\ (j_m)$
5	10000	15000	0.125	360	=(LN(AE$5)-LN(AD$5))/(AG5*LN(1+AF$5/AG5))
6				52	=(LN(AE$5)-LN(AD$5))/(AG6*LN(1+AF$5/AG6))
7				24	=(LN(AE$5)-LN(AD$5))/(AG7*LN(1+AF$5/AG7))

	AI
4	$t\ (\rho_m)$
5	=(LN(AE$5)-LN(AD$5))/(-AG5*LN(1-AF$5/AG5))
6	=(LN(AE$5)-LN(AD$5))/(-AG6*LN(1-AF$5/AG6))
7	=(LN(AE$5)-LN(AD$5))/(-AG7*LN(1-AF$5/AG7))

Esercizio 1.12 (9) - Calcolo di capitali impiegati >>>

- ***Al tempo iniziale 0 si è impiegata un capitale di importo C e dopo 18 mesi un capitale doppio di importo 2C e alla fine del quinto anno si è ottenuto un montante pari ad € 5000. Avendo effettuato l'operazione al tasso annuo nominale d'interesse (m = 12) del 6.50%, si determini l'ammontare dei due capitali impiegati***

$$C \cdot (1+\frac{0.065}{12})^{12 \cdot 5} + 2C \cdot (1+\frac{0.065}{12})^{12 \cdot 3.5} = 5000 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow C = \frac{5000}{1.00541667^{60} + 2 \cdot 1.00541667^{42}}$$

	AD	AE	AF	AG	AH
17	M_t	t_1	t_2	m	i
18	5000.00	5.00	3.50	12.00	6.50%
19		1.00	2.00		
20		1.3828	2.5094		
21		C	2C		
22		1284.62	2569.25		

	AD	AE
17	M_t	t_1
18	5000	5
19		1
20		=AE19*(1+$AH18/$AG18)^($AG18*AE18)
21		C
22		=AD18/(AE20+AF20)

	AF	AG	AH
17	t_2	m	i
18	3.5	12	0.065
19	2		
20	=AF19*(1+$AH18/$AG18)^($AG18*AF18)		
21	2C		
22	=AF19*AE22		

Esercizi svolti in Apl Dyalog

***Kenneth (Ken) Eugene Iverson** (Camrose (Alberta) Canada 1920 – Toronto 2004) è stato un informatico canadese noto aver sviluppato nel 1962 la notazione matematica per il linguaggio di programmazione funzionale APL. Nel 1979 Iverson è stato insignito del premio Turing per i suoi contributi alla notazione matematica e alla teoria dei linguaggi di programmazione. Nato da una famiglia contadina di origine norvegese, Iverson ha mostrato, fin da ragazzo, un'attitudine precoce per la matematica. Durante la seconda guerra mondiale, mentre serviva nella Royal Canadian Air Force, ha ottenuto il diploma di scuola superiore, seguendo corsi per corrispondenza. Dopo la guerra, entrato nella Queen's University di Kingston (Ontario), si è laureato nel 1950 in Matematica e Fisica. Continuando la sua formazione, Iverson ha conseguito la Laurea in Matematica presso l'Università di Harvard ed ha iniziato a lavorare con Howard Aiken (progettista del Harvard Mark I, uno dei primi computer digitali) e Wassily Leontief (economista, ideatore del modello input-output di analisi economica, per il quale avrebbe ottenuto il premio Nobel). Il Modello di Leontief richiedeva grandi matrici e Iverson ha lavorato in programmi in grado di valutare queste matrici sul Harvard Mark IV (conseguendo il dottorato di ricerca in Matematica Applicata nel 1954, con una tesi basata su questo lavoro). Iverson ha soggiornato in Harvard come professore assistente per cinque anni, non riuscendo però a passare nel ruolo universitario. Nel*

1960, Iverson è stato assunto dall'IBM per sviluppare, insieme all'analista Adin Falkoff, una notazione matematica necessaria per un linguaggio di programmazione funzionale da utilizzare su calcolatori della serie System/360 IBM. Nel1980, Iverson ha lasciato IBM per la IP Sharp Associates, azienda leader canadese nel campo del timesharing, dove ha implementato lo sviluppo del linguaggio di programmazione APL. Nell'estate del 1989, Iverson, con Roger Hui e Arthur Whitney, ha prodotto un prototipo dell'interprete J, sulle cui implementazioni, Iverson e Hui hanno continuato a collaborare per i successivi 15 anni.

Esercizio 1.4 (1) - Funzioni finanziarie

```
[0]   fin1 W;X;Y;P;M;XY;IXY;DXY;R;V;I;D;II;DD;WW
[1]   (X Y P M)←W
[2]   (XY IXY DXY)←(Y-X),2⍴M-P
[3]   (I D)←(¯1+R←M÷P),1-V←P÷M
[4]   (II DD WW)←(D I I)×R V D
[5]   XY IXY DXY R V I D II DD WW
```

```
      fin1 3 8  800 1000
5 200 200 1.25 0.8 0.25 0.2 0.25 0.2 0.05
```

Esercizio 1.4 (2) - Schema generale delle funzioni finanziarie

```
[0]   R←rv V
[1]   R←÷V
```

```
[0]   R←ri I
[1]   R←1+I
```

```
[0]   R←rd D
[1]   R←rv vd D
```

```
[0]   V←vr R
[1]   V←÷R
```

```
[0]   V←vi I
[1]   V←vr ri I
```

```
[0]   V←vd D
[1]   V←1-D
```

```
[0]   I←ir R
[1]   I←R-1
```

```
[0]   I←iv V
[1]   I←ir rv V
```

```
[0]   I←id D
[1]   I←ir rd D
```

```
[0]   D←dr R
[1]   D←dv vr R
```

```
[0]   D←dv V
[1]   D←1-V
```

```
[0]   D←di I
[1]   D←dv vi I
```

```
      (rv 0.9524),(ri 0.06),rd 0.0654
1.05 1.06 1.07
      (vr 1.04),(vi 0.06),vd .0654
0.9615 0.9434 0.9346
      (ir 1.04),(iv 0.9524),id 0.0654
0.04 0.04998 0.06998
      (dr 1.04),(dv 0.9524),di 0.06
0.03846 0.0476 0.0566
```

Esercizio 1.7 (1) - Grandezze finanziarie uniperiodali

```
[0]   R←rw W
[1]   R←*W
```

```
[0]   W←wr R
[1]   W←⍟R
```

```
[0]   I←iw W
[1]   I←ir rw W
```

```
[0]   V←vw W
[1]   V←vr rw W
```

```
[0]    D←dw W
[1]    D←dr rw W
```

```
[0]    W←wv V
[1]    W←wr rv V
```

```
[0]    W←wi I
[1]    W←wr ri I
```

```
[0]    W←wd D
[1]    W←wr rd D
```

```
      (rv 0.92593),(ri 0.08),(rd 0.07407),rw 0.07696
1.08 1.08 1.08 1.08
      (vr 1.08),(vi 0.08),(vd 0.07407),vw 0.07696
0.9259 0.9259 0.9259 0.9259
      (ir 1.08),(iv 0.92593),(id 0.07407),iw 0.07696
0.08 0.08 0.08 0.08
      (dr 1.08),(dv 0.92593),(di 0.08),dw 0.07696
0.07407 0.07407 0.07407 0.07407
      (wr 1.08),(wv 0.92593),(wi 0.08),wd 0.07407
0.07696 0.07696 0.07696 0.07696
```

Esercizio 1.7 (2) - Approssimazione di grandezze finanziarie >>>

```
[0]    Z←N fin2 I;D;DE;N1;NN;DEI;DED;IDE;DDE
[1]    D←I÷1+I ⋄ DE←⍟1+I ⋄ NN←!N1←⍳N
[2]    DEI←-+\((-I)*N1)÷N1
[3]    DED←+\(D*N1)÷N1
[4]    IDE←+\(DE*N1)÷NN
[5]    DDE←-+\((-DE)*N1)÷NN
[6]    Z←⍉(4,N)⍴DEI,DED,IDE,DDE
```

```
      10 fin2 0.1
0.1        0.09090909 0.09531018 0.09531018
0.095      0.09504132 0.09985219 0.09076816
0.09533333 0.09529176 0.0999965  0.09091246
0.09530833 0.09530884 0.09999993 0.09090903
0.09531033 0.09531008 0.1        0.09090909
0.09531017 0.09531017 0.1        0.09090909
0.09531018 0.09531018 0.1        0.09090909
0.09531018 0.09531018 0.1        0.09090909
0.09531018 0.09531018 0.1        0.09090909
0.09531018 0.09531018 0.1        0.09090909
```

Esercizio 1.8 (1) - Funzioni finanziarie al variare della durata

```
[0]   Z←I rtcc1 T
[1]   Z←(1+I)*T
```

```
[0]   Z←I vtcc1 T
[1]   Z←vr I rtcc1 T
```

```
[0]   Z←I itcc1 T
[1]   Z←ir I rtcc1 T
```

```
[0]   Z←I dtcc1 T
[1]   Z←dv I vtcc1 T
```

```
[0]   Z←I fin3 T;TT;RT;VT;IT;DT
[1]   RT←I rtcc1 TT←0,⍳T
[2]   VT←I vtcc1 TT
[3]   IT←I itcc1 TT
[4]   DT←I dtcc1 TT
[5]   Z←⍉(4,T+1)⍴RT,VT,IT,DT
```

```
       .1 fin3 10
1          1          0          0
1.1        0.9090909  0.1        0.09090909
1.21       0.8264463  0.21       0.1735537
1.331      0.7513148  0.331      0.2486852
1.4641     0.6830135  0.4641     0.3169865
1.61051    0.6209213  0.61051    0.3790787
1.771561   0.5644739  0.771561   0.4355261
1.948717   0.5131581  0.9487171  0.4868419
2.143589   0.4665074  1.143589   0.5334926
2.357948   0.4240976  1.357948   0.5759024
2.593742   0.3855433  1.593742   0.6144567
```

Nel caso di utilizzazione del tasso uniperiodale di sconto o della forza d'interesse, l'utilizzazione delle precedenti funzioni richiede la conversione del parametro di sinistra al fine di ricondursi alla variabile prevista dalla funzione

$$Z \leftarrow \left.\begin{matrix} I \\ (id\,D) \\ (iw\,W) \end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix} rtcc1 \\ vtcc1 \\ itcc1 \\ dtcc1 \end{matrix}\right\} T$$

```
[0]    Z←IT rcc1 T
[1]    Z←IT rtcc1÷T
```

```
[0]    Z←IT vcc1 T
[1]    Z←vr IT rcc1 T
```

```
[0]    Z←IT icc1 T
[1]    Z←ir IT rcc1 T
```

```
[0]    Z←IT dcc1 T
[1]    Z←dv IT vcc1 T
```

```
[0]    Z←IT wcc1 T
[1]    Z←wi IT icc1 T
```

```
[0]   Z←IT tcc1 I
[1]   Z←(⍟ri IT)÷wi I
```

Nel caso di utilizzazione di grandezze finanziarie diverse da quelle indicate, l'utilizzazione delle precedenti funzioni richiede la conversione dei parametri di sinistra (ed eventualmente di destra) al fine di ricondursi alle variabili previste dalla funzione

$$Z \leftarrow \left.\begin{array}{c} IT \\ (ir\ RT) \\ (iv\ VT) \\ (id\ DT) \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{c} rcc1 \\ vcc1 \\ icc1 \\ dcc1 \\ wcc1 \end{array}\right\} T$$

$$Z \leftarrow \left.\begin{array}{c} IT \\ (ir\ RT) \\ (iv\ VT) \\ (id\ DT) \end{array}\right\} \{tcc1\} \left\{\begin{array}{c} I \\ (id\ D) \\ (iw\ W) \end{array}\right.$$

Esercizio 1.8 (2) - Calcolo di montanti >>>

```
[0]   Z←(ff fin4aa)WW;C;X;T
[1]   (C X T)←WW ⋄ Z←C×X ff T
```

```
      A←1000 0.0575 2.25
      B←2000 (id 0.043) 3.75
      C←3000 (iw 0.035) 4.5
      (rtcc1 fin4aa)¨A B C
1134.046 2358.361 3511.742
```

Esercizio 1.8 (3) - Calcolo di valori attuali >>>

```
      A←6000 0.0375 1.25
      B←5000 (id 0.027) 2.5
      C←4000 (iw 0.025) 7.75
      (vtcc1 fin4aa)¨A B C
5730.152 4669.304 3295.455
```

Esercizio 1.8 (4) - Calcolo di interessi e sconti >>>

```
      A←8000 0.0475 1.5
      B←7800 (id 0.017) 3.5
      C←6700 (iw 0.0075) 6
      (itcc1 fin4aa)¨A B C
576.7161 482.4208 308.3867
      (dtcc1 fin4aa)¨A B C
537.9365 454.3215 294.8169
```

Esercizio 1.8 (5) - Calcolo di tassi di interesse e di sconto >>>

```
[0]   Z←(ff fin4bb)WW;P;M;X
[1]   (P M X)←WW ⋄ Z←(ir M÷P)ff X
```

```
      A←18000 20000 5.75
      (icc1 fin4bb) A
0.01849247
      (dcc1 fin4bb) A
0.01815671
      (wcc1 fin4bb) A
0.01832357
```

Esercizio 1.8 (6) - Calcolo del tempo >>>

```
      (tcc1 fin4bb) 10000 15000 0.125
3.442475
```

Esercizio 1.8 (7) - Calcolo di capitali impiegati >>>

```
[0]     Z←(ff fin4cc)WW;M;T1;T2;I;K
[1]     (M T1 T2 I)←WW ⋄ K←⍳2
[2]     Z←K×M÷+/K×I ff¨T1 T2
```

```
      (rtcc1 fin4cc) 5000 5 3.5 0.065
1294.242 2588.483
```

Esercizio 1.8 (8) - Calcolo del periodo di raddoppio (1) >>>

```
[0]     Z←fin5a WW;I;L2;Z1;Z2;Z3;Z4
[1]     Z1←0.72÷I←0.01×⍳WW
[2]     Z2←(L2←⍟2)÷wi I
[3]     Z3←L2÷I
[4]     Z4←Z3+L2÷2
[5]     Z←⍉(4,WW)⍴Z1,Z2,Z3,Z4
```

```
       fin5a 20
72     69.66  69.31  69.66
36     35     34.66  35
24     23.45  23.1   23.45
18     17.67  17.33  17.68
14.4   14.21  13.86  14.21
12     11.9   11.55  11.9
10.29  10.24   9.902 10.25
 9      9.006  8.664  9.011
 8      8.043  7.702  8.048
 7.2    7.273  6.931  7.278
 6.545  6.642  6.301  6.648
 6      6.116  5.776  6.123
 5.538  5.671  5.332  5.678
 5.143  5.29   4.951  5.298
 4.8    4.959  4.621  4.968
 4.5    4.67   4.332  4.679
 4.235  4.415  4.077  4.424
 4      4.188  3.851  4.197
 3.789  3.985  3.648  3.995
 3.6    3.802  3.466  3.812
```

Esercizio 1.8 (9) - Calcolo del periodo di raddoppio (2) >>>

```
[0]     Z←NN(ff fin5bb)WW;I;N
[1]     Z←⍉(N←⍳NN-1)∘.ff I←0.01×⍳WW
```

```
      10 (tcc1 fin5bb) 20
```

69.66	110.4	139.3	161.7	180.1	195.6	209	220.8	231.4
35	55.48	70.01	81.27	90.48	98.27	105	111	116.3
23.45	37.17	46.9	54.45	60.62	65.83	70.35	74.33	77.9
17.67	28.01	35.35	41.04	45.68	49.61	53.02	56.02	58.71
14.21	22.52	28.41	32.99	36.72	39.88	42.62	45.03	47.19
11.9	18.85	23.79	27.62	30.75	33.4	35.69	37.71	39.52
10.24	16.24	20.49	23.79	26.48	28.76	30.73	32.48	34.03
9.006	14.27	18.01	20.91	23.28	25.28	27.02	28.55	29.92
8.043	12.75	16.09	18.68	20.79	22.58	24.13	25.5	26.72
7.273	11.53	14.55	16.89	18.8	20.42	21.82	23.05	24.16
6.642	10.53	13.28	15.42	17.17	18.65	19.93	21.05	22.06
6.116	9.694	12.23	14.2	15.81	17.17	18.35	19.39	20.32
5.671	8.989	11.34	13.17	14.66	15.92	17.01	17.98	18.84
5.29	8.385	10.58	12.28	13.67	14.85	15.87	16.77	17.57
4.959	7.861	9.919	11.52	12.82	13.92	14.88	15.72	16.48
4.67	7.402	9.34	10.84	12.07	13.11	14.01	14.8	15.51
4.415	6.997	8.83	10.25	11.41	12.39	13.24	13.99	14.67
4.188	6.638	8.376	9.724	10.83	11.76	12.56	13.28	13.91
3.985	6.316	7.969	9.252	10.3	11.19	11.95	12.63	13.24
3.802	6.026	7.604	8.827	9.827	10.67	11.41	12.05	12.63

Esercizio 1.9 (1) - Funzioni finanziarie al variare della durata

```
[0]   Z←I rtcs1 T
[1]   Z←1+I×T
```

```
[0]   Z←I vtcs1 T
[1]   Z←vr I rtcs1 T
```

```
[0]   Z←I itcs1 T
[1]   Z←ir I rtcs1 T
```

```
[0]   Z←I dtcs1 T
[1]   Z←dv I vtcs1 T
```

```
[0]   Z←I wtcs1 T
[1]   Z←I÷I rtcs1 T
```

```
[0]    Z←I fin6 T;TT;RT;VT;IT;DT;WT
[1]    RT←I rtcs1 TT←0,⍳T
[2]    VT←I vtcs1 TT
[3]    IT←I itcs1 TT
[4]    DT←I dtcs1 TT
[5]    WT←I wtcs1 TT
[6]    Z←⍉(5,T+1)⍴RT,VT,IT,DT,WT
```

```
      .1 fin6 10
1   1         0   0          0.1
1.1 0.9090909 0.1 0.09090909 0.09090909
1.2 0.8333333 0.2 0.1666667  0.08333333
1.3 0.7692308 0.3 0.2307692  0.07692308
1.4 0.7142857 0.4 0.2857143  0.07142857
1.5 0.6666667 0.5 0.3333333  0.06666667
1.6 0.625     0.6 0.375      0.0625
1.7 0.5882353 0.7 0.4117647  0.05882353
1.8 0.5555556 0.8 0.4444444  0.05555556
1.9 0.5263158 0.9 0.4736842  0.05263158
2   0.5       1   0.5        0.05
```

Nel caso di utilizzazione del tasso uniperiodale di sconto, l'utilizzazione delle precedenti funzioni richiede la conversione del parametro di sinistra al fine di ricondursi alla variabile prevista dalla funzione

$$Z \leftarrow \left.\begin{matrix} I \\ (id\ D) \end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix} rtcs1 \\ vtcs1 \\ itcs1 \\ dtcs1 \\ wtcs1 \end{matrix}\right\} T$$

```
[0]  Z←IT ics1 T
[1]  Z←IT itcs1÷T
```

```
[0]  Z←IT dcs1 T
[1]  Z←di IT ics1 T
```

```
[0]  Z←IT tcs1 I
[1]  Z←(¯1+ri IT)÷I
```

Nel caso di utilizzazione di grandezze finanziarie diverse da quelle indicate, l'utilizzazione delle precedenti funzioni richiede la conversione dei parametri di sinistra (ed eventualmente di destra) al fine di ricondursi alle variabili previste dalla funzione

$$Z \leftarrow \left.\begin{matrix} IT \\ (ir\ RT) \\ (iv\ VT) \\ (id\ DT) \end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix} ics1 \\ dcs1 \end{matrix}\right\} T$$

$$Z \leftarrow \left.\begin{matrix} IT \\ (ir\ RT) \\ (iv\ VT) \\ (id\ DT) \end{matrix}\right\} \{tcs1\} \left\{\begin{matrix} I \\ (id\ D) \end{matrix}\right.$$

Esercizio 1.9 (2) - Calcolo di montanti

```
      A←1000 0.0575 2.25
      B←2000 (id 0.043) 3.75
      (rtcs1 fin4aa)¨A B
1129.375 2336.991
```

Esercizio 1.9(3) - Calcolo di valori attuali

```
      A←6000 0.0375 1.25
      B←5000 (id 0.027) 2.5
      (vtcs1 fin4aa)¨A B
5731.343 4675.637
```

Esercizio 1.9 (4) - Calcolo di interessi e sconti

```
      A←8000 0.0475 1.5
      B←7800 (id 0.017) 3.5
      (itcs1 fin4aa)¨A B
570 472.1261
      (dtcs1 fin4aa)¨A B
532.0887 445.1799
```

Esercizio 1.9 (5) - Calcolo di tassi di interesse e di sconto

```
      A←18000 20000 5.75
      (ics1 fin4bb) A
0.01932367
      (dcs1 fin4bb) A
0.01895735
```

Esercizio 1.9 (6) - Calcolo del tempo

```
      (tcs1 fin4bb) 10000 15000 0.125
4
```

Esercizio 1.9 (7) - Calcolo di capitali impiegati

```
      (rtcs1 fin4cc) 5000 5 3.5 0.065
1322.751 2645.503
```

Esercizio 1.9 (8) - Calcolo del periodo di raddoppio (2)

```
      10 (tcs1 fin5bb) 20
100      200     300     400     500     600     700     800     900
 50      100     150     200     250     300     350     400     450
 33.33    66.67 100     133.3   166.7   200     233.3   266.7   300
 25       50      75    100     125     150     175     200     225
 20       40      60     80     100     120     140     160     180
 16.67    33.33   50     66.67   83.33 100     116.7   133.3   150
 14.29    28.57   42.86   57.14   71.43   85.71 100     114.3   128.6
 12.5     25      37.5    50      62.5    75      87.5  100     112.5
 11.11    22.22   33.33   44.44   55.56   66.67   77.78   88.89 100
 10       20      30      40      50      60      70      80      90
  9.091   18.18   27.27   36.36   45.45   54.55   63.64   72.73   81.82
  8.333   16.67   25      33.33   41.67   50      58.33   66.67   75
  7.692   15.38   23.08   30.77   38.46   46.15   53.85   61.54   69.23
  7.143   14.29   21.43   28.57   35.71   42.86   50      57.14   64.29
  6.667   13.33   20      26.67   33.33   40      46.67   53.33   60
  6.25    12.5    18.75   25      31.25   37.5    43.75   50      56.25
  5.882   11.76   17.65   23.53   29.41   35.29   41.18   47.06   52.94
  5.556   11.11   16.67   22.22   27.78   33.33   38.89   44.44   50
  5.263   10.53   15.79   21.05   26.32   31.58   36.84   42.11   47.37
  5       10      15      20      25      30      35      40      45
```

Esercizio 1.10 (1) - Funzioni finanziarie al variare della durata >>>

```
[0]   Z←D vtch1 T
[1]   Z←1-D×T
```

```
[0]   Z←D rtch1 T
[1]   Z←rv D vtch1 T
```

```
[0]   Z←D dtch1 T
[1]   Z←dv D vtch1 T
```

```
[0]   Z←D itch1 T
[1]   Z←ir D rtch1 T
```

```
[0]   Z←D wtch1 T
[1]   Z←D÷D vtch1 T
```

```
Z←D fin7 T;TT;RT;VT;IT;DT;WT
RT←D rtch1 TT←0,⍳T
VT←D vtch1 TT
IT←D itch1 TT
DT←D dtch1 TT
WT←D wtch1 TT
Z←⍉(5,T+1)⍴RT,VT,IT,DT,WT
```

```
      .08 fin7 10
1        1    0          0    0.08
1.086957 0.92 0.08695652 0.08 0.08695652
1.190476 0.84 0.1904762  0.16 0.0952381
1.315789 0.76 0.3157895  0.24 0.1052632
1.470588 0.68 0.4705882  0.32 0.1176471
1.666667 0.6  0.6666667  0.4  0.1333333
1.923077 0.52 0.9230769  0.48 0.1538462
2.272727 0.44 1.272727   0.56 0.1818182
2.777778 0.36 1.777778   0.64 0.2222222
3.571429 0.28 2.571429   0.72 0.2857143
5        0.2  4          0.8  0.4
```

Nel caso di utilizzazione del tasso uniperiodale d'interesse, l'utilizzazione delle precedenti funzioni richiede la conversione del parametro di sinistra al fine di ricondursi alla variabile prevista dalla funzione

$$\boxed{Z \leftarrow \left.\begin{matrix} D \\ (di\ I) \end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix} rtch1 \\ vtch1 \\ itch1 \\ dtch1 \\ wtch1 \end{matrix}\right\} T}$$

```
[0]   Z←DT dch1 T
[1]   Z←DT dtch1÷T
```

```
[0]   Z←DT ich1 T
[1]   Z←id DT dch1 T
```

```
[0]   Z←DT tch1 D
[1]   Z←(1-vd DT)÷D
```

Nel caso di utilizzazione di grandezze finanziarie diverse da quelle indicate, l'utilizzazione delle precedenti funzioni richiede la conversione dei parametri di sinistra (ed eventualmente di destra) al fine di ricondursi alle variabili previste dalla funzione

$$Z \leftarrow \left.\begin{array}{c} DT \\ (dv\ VT) \\ (dr\ RT) \\ (di\ IT) \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{c} dch1 \\ ich1 \end{array}\right\} T$$

$$Z \leftarrow \left.\begin{array}{c} DT \\ (dv\ VT) \\ (dr\ RT) \\ (di\ IT) \end{array}\right\} \{tch1\} \left\{\begin{array}{c} D \\ (di\ I) \end{array}\right.$$

Esercizio 1.10 (2) - Calcolo di montanti

```
      A←1000 (di 0.0575) 2.25
      B←2000 0.043 3.75
      (rtch1 fin4aa)¨A B
1139.394 2384.501
```

Esercizio 1.10 (3) - Calcolo di valori attuali

```
      A←6000 (di 0.0375) 1.25
      B←5000 0.027 2.5
      (vtch1 fin4aa)¨A B
5728.916 4662.5
```

Esercizio 1.10 (4) - Calcolo di interessi e sconti

```
      A←8000 (di 0.0475) 1.5
      B←7800 0.017 3.5
      (itch1 fin4aa)¨A B
583.8668 493.4609
      (dtch1 fin4aa)¨A B
544.1527 464.1
```

Esercizio 1.10 (5) - Calcolo di tassi di interesse e di sconto

```
[0]   Z←(ff fin4dd)WW;P;M;X
[1]   (P M X)←WW ◇ Z←(dv P÷M)ff X
```

```
      A←18000 20000 5.75
      (ich1 fin4dd) A
0.01769912
      (dch1 fin4dd) A
0.0173913
```

Esercizio 1.10 (6) - Calcolo del tempo

```
      (tch1 fin4dd) 10000 15000 0.125
2.666667
```

Esercizio 1.10 (7) - Calcolo di capitali impiegati

```
      (rtch1 fin4cc) 5000 5 3.5 0.065
1228.357 2456.714
```

Esercizio 1.10 (8) - Calcolo del periodo di raddoppio (2)

```
[0]    Z←NN(ff fin5cc)WW;I;N
[1]    Z←⍉(di N←⍳NN-1)∘.ff di I←0.01×⍳WW
```

```
      10 (tch1 fin5cc) 20
50.5   67.33  75.75  80.8   84.17  86.57  88.37  89.78  90.9
25.5   34     38.25  40.8   42.5   43.71  44.62  45.33  45.9
17.17  22.89  25.75  27.47  28.61  29.43  30.04  30.52  30.9
13     17.33  19.5   20.8   21.67  22.29  22.75  23.11  23.4
10.5   14     15.75  16.8   17.5   18     18.37  18.67  18.9
 8.833 11.78  13.25  14.13  14.72  15.14  15.46  15.7   15.9
 7.643 10.19  11.46  12.23  12.74  13.1   13.37  13.59  13.76
 6.75   9     10.12  10.8   11.25  11.57  11.81  12     12.15
 6.056  8.074  9.083  9.689 10.09  10.38  10.6   10.77  10.9
 5.5    7.333  8.25   8.8    9.167  9.429  9.625  9.778  9.9
 5.045  6.727  7.568  8.073  8.409  8.649  8.83   8.97   9.082
 4.667  6.222  7      7.467  7.778  8      8.167  8.296  8.4
 4.346  5.795  6.519  6.954  7.244  7.451  7.606  7.726  7.823
 4.071  5.429  6.107  6.514  6.786  6.98   7.125  7.238  7.329
 3.833  5.111  5.75   6.133  6.389  6.571  6.708  6.815  6.9
 3.625  4.833  5.438  5.8    6.042  6.214  6.344  6.444  6.525
 3.441  4.588  5.162  5.506  5.735  5.899  6.022  6.118  6.194
 3.278  4.37   4.917  5.244  5.463  5.619  5.736  5.827  5.9
 3.132  4.175  4.697  5.011  5.219  5.368  5.48   5.567  5.637
 3      4      4.5    4.8    5      5.143  5.25   5.333  5.4
```

Esercizio 1.12 (5) - Calcolo di montanti >>>

```
      A←1000 (2 ijm 0.0575) 2.25
      B←2000 (3 iqm 0.043) 3.75
      C←3000 (iw 0.035) 4.5
      (rtcc1 fin4aa)¨A B C
1136.042 2352.701 3511.742
```

Esercizio 1.12 (6) - Calcolo di valori attuali >>>

```
      A←6000 (4 ijm 0.0375) 1.25
      B←5000 (6 iqm 0.027) 2.5
      C←4000 (iw 0.025) 7.75
      (vtcc1 fin4aa)¨A B C
5726.49 4672.927 3295.455
```

Esercizio 1.12 (7) - Calcolo di tassi di interesse e di sconto >>>

```
      A←18000 20000 5.75
      (icc1 fin4bb) A
0.01849247
      (dcc1 fin4bb) A
0.01815671
      (wcc1 fin4bb) A
0.01832357
```

NO

Esercizio 1.12 (8) - Calcolo del tempo >>>

```
      (tcc1 fin4bb) 10000 15000 0.125
3.442475
```

Esercizio 1.12 (9) - Calcolo di capitali impiegati >>>

```
[0]      Z←(ff fin4cc)WW;M;T1;T2;I;K
[1]      (M T1 T2 I)←WW ⋄ K←⍳2
[2]      Z←K×M÷+/K×I ff¨T1 T2
```

```
      (rtcc1 fin4cc) 5000 5 3.5 0.065
1294.242 2588.483
```

```
[0]   JM←M jmqm QM
[1]   JM←QM÷1-QM÷M
```

```
[0]   QM←M qmjm JM
[1]   QM←JM÷1+JM÷M
```

```
[0]   I←M ijm JM
[1]   I←(JM÷M)itcc1 M
```

```
[0]   D←M dqm QM
[1]   D←((M jmqm QM)÷M)dtcc1 M
```

```
[0]   D←M djm JM
[1]   D←di M ijm JM
```

```
[0]   I←M iqm QM
[1]   I←id M dqm QM
```

```
[0]   W←M wjm JM
[1]   W←wi M ijm JM
```

```
[0]   W←M wqm QM
[1]   W←wd M dqm QM
```

```
[0]   JM←M jmi I
[1]   JM←M×I itcc1÷M
```

```
[0]   QM←M qmd D
[1]   QM←M×D dtcc1÷M
```

```
[0]   JM←M jmd D
[1]   JM←M jmi id D
```

```
[0]   QM←M qmi I
[1]   QM←M qmd di I
```

```
[0]   JM←M jmw W
[1]   JM←M jmi iw W
```

```
[0]   QM←M qmw W
[1]   QM←M qmd dw W
```

```
[0]   JM←MN jmjn JN
[1]   (M N)←MN ⋄ JM←M jmi N ijm JN
```

```
[0]   QM←MN qmqn QN
[1]   (M N)←MN ⋄ QM←M qmd N dqm QN
```

```
[0]     JM←MN jmqn QN
[1]     (M N)←MN ⋄ JM←M jmqm MN qmqn QN
```

```
[0]     QM←MN qmjn JN
[1]     (M N)←MN ⋄ QM←M qmjm MN jmjn JN
```