

## Sulle diverse impostazioni dei piani di ammortamento alla francese in regime di capitalizzazione semplice

Nelle motivazioni di chi sostiene la tesi della scelta del tempo iniziale per la stesura di un piano di ammortamento alla francese in capitalizzazione semplice è presente un'analogia tra il tempo della pattuizione di un contratto, con allegato piano di ammortamento, e il tempo di equilibrio della legge finanziaria con cui stendere il piano.

Alla pattuizione, qualunque sia la scelta del tempo di equilibrio, è possibile allegare il piano di ammortamento al contratto di cui ne è parte integrante.

Si tratta di due aspetti per loro natura differenti:

- nella pattuizione del contratto, l'epoca  $t=0$  è quella in cui si fissano parametri, caratteristiche e regole e a tale epoca si allega, facendone parte integrante, il piano di ammortamento;
- nella stesura del piano di ammortamento in capitalizzazione semplice, il tempo di equilibrio o di equivalenza o la condizione di chiusura (come la chiama la prof.ssa Caliri) è l'epoca (iniziale o finale o, in teoria, qualsiasi altra meno usuale) nella quale la legge di capitalizzazione, utilizzata per calcolare le grandezze del piano, coerentemente con le sue caratteristiche, deve soddisfare condizioni di tipo finanziario. N.B. La citata condizione finanziaria non va confusa con la condizione elementare o aritmetica (che esula dall'aspetto finanziario della legge di capitalizzazione, che invece riguarda la formazione degli interessi) secondo cui la somma delle quote capitale deve restituire il debito contratto.

In altre parole, si tratta di due aspetti, quello giuridico e quello matematico, profondamente differenti, che dovrebbero e potrebbero coesistere nel rispetto delle loro peculiarità: il tempo iniziale di stipula è il tempo in cui tutti i contratti vengono concordati, anche quando si tratti di un contratto a termine o future, o anche di contratti in cui alcune grandezze sono aleatorie, come il tasso variabile; altra cosa è (aspetto tecnico finanziario) il tempo di equilibrio o di equivalenza, che è il tempo in cui la legge di capitalizzazione scelta ha il tempo di riferimento per la determinazione delle sue grandezze, scelta di tempo che deve essere coerente con le caratteristiche finanziarie della legge stessa.

Il piano di ammortamento in capitalizzazione semplice è unico, una volta fissato un tempo di equilibrio, qualunque esso sia; altrimenti sarebbe indeterminato.

Si rileva quanto segue:

1. A parità di caratteristiche del mutuo, la rata di ammortamento alla francese in capitalizzazione semplice con equilibrio iniziale è più onerosa di quella con equilibrio finale: ciò potrebbe non interessare alla banca per convenienza, ma certamente al cliente si
2. Nella fisiologia del piano di ammortamento alla francese in capitalizzazione semplice con equilibrio iniziale, **si veda esempio di seguito riportato**, nel caso di durata pari a 30 anni con tasso annuo nominale di interesse pari al 10%, si rileva, per un certo periodo iniziale, la grave anomalia delle quote capitali negative, ovvero la rata pagata è insufficiente a coprire la quota interessi, e conseguente debito residuo crescente.

Tale anomalia rende il piano di ammortamento "improprio" (così definito dalla prof.ssa Caliri), perché "la rata di un ammortamento deve essere preposta al pagamento degli

interessi e al rimborso di parte del prestito". Da sottolineare che tale situazione non si verifica in condizioni patologiche, cioè per sopravvenuti impreveduti aumenti di tasso o salti di rata, ma per effetto dell'equilibrio iniziale in particolari situazioni di durata e tasso, dati numericamente non improbabili per un piano di ammortamento.

**Concludendo:** sarebbe un errore considerare sullo stesso livello i due "tempi": di pattuizione del contratto di mutuo e di equilibrio finanziario della legge di capitalizzazione, e in tal modo ritenere più coerente la scelta del piano con equilibrio iniziale (piuttosto che quella con equilibrio finale), solo perché i due tempi sono "coerenti temporalmente", se per coerenza temporale si intende la coincidenza dell'epoca nella quale avviene la pattuizione del contratto (con fissazione della rata e disponibilità dell'allegato piano di ammortamento) e l'epoca di equilibrio finanziario.

La scelta del tempo di equilibrio rientra tra le caratteristiche proprie, intrinseche delle leggi del regime finanziario della capitalizzazione semplice, con il quale viene determinato il piano di ammortamento alla francese; essendo tale legge caratterizzata dal pagamento degli interessi alla fine del periodo dell'operazione di mutuo, per sua stessa natura, tale scelta del tempo di equilibrio dovrà essere il tempo finale.

**Esempio numerico** che mette a confronto le due stesure di piani di ammortamento "alla francese" in capitalizzazione semplice (CS) con differente scelta dell'epoca di equilibrio finanziario (e con evidenza del possibile fenomeno delle quote di capitale negative nel Piano 2):

- **Piano 1** - piano di ammortamento in CS, con scelta dell'epoca finale di equilibrio finanziario
- **Piano 2** - piano di ammortamento in CS, con scelta dell'epoca iniziale di equilibrio finanziario

Dati dell'esempio:

- |  |                    |
|--|--------------------|
| • importo iniziale del prestito                      | $D_0 = 100000$     |
| • durata dell'ammortamento(in anni)                  | $\beta = 30$       |
| • frazionamento (annuo) delle rate                   | $m = 1$            |
| • numero delle rate                                  | $n = \beta m = 30$ |
| • tassi nominale (periodale e effettivo) d'interesse | $i = 10\%$         |

Le formule seguenti definiscono l'ammontare della rata costante in CC e in CS (con differente scelta del tempo di equilibrio: **finale** oppure **iniziale**):

$$R^{cc} = \frac{iD_0}{1 - (1 + i)^{-n}} \quad R^{\bar{cs}} = \frac{D_0(1 + in)}{n \left(1 + i \frac{n-1}{2}\right)} \quad R^{\bar{cs}} = D_0 \left( \sum_{k=1}^n (1 + ik)^{-1} \right)^{-1}$$

La formula

$$I_k = iD_{k-1}$$

rappresenta la quota interesse, pari al prodotto tra il tasso di interesse e il debito residuo precedente, e risulta caratteristica del regime finanziario della capitalizzazione composta, mentre le due formule che prevedono il fattore di attualizzazione

$$\bar{I}_k^{cs} = \frac{iD_{k-1}^{cs}}{1 + i(n - k)} \quad \bar{I}_k^{cs} = \frac{iD_{k-1}^{cs}}{1 + i(k - 1)}$$

(quota interesse pari al prodotto tra il tasso di interesse, il debito residuo precedente e il relativo fattore di attualizzazione) differenziato ( $\bar{I}_k^{cs}$  oppure  $\bar{I}_k^{cs}$ ) a seconda della scelta dell'epoca di equilibrio dell'operazione finanziaria (rispettivamente, **finale** oppure **iniziale**) risultano caratteristiche del regime finanziario della capitalizzazione semplice (per approfondimenti e dimostrazioni con evidenza numerica si veda [10, par 1.1]).

**Piani (1 e 2) - Piani di ammortamento in capitalizzazione semplice, rispettivamente, con epoca di equilibrio finale e epoca di equilibrio iniziale**

Tempi	Rata	Interessi	Capitale	Debito	Tempi	Rata	Interessi	Capitale	Debito
0				100000.00	0				100000.00
1	5442.18	2564.10	2878.07	97121.93	1	7409.74	10000.00	-2590.26	102590.26
2	5442.18	2555.84	2886.34	94235.59	2	7409.74	9326.39	-1916.65	104506.90
3	5442.18	2546.91	2895.27	91340.32	3	7409.74	8708.91	-1299.17	105806.07
4	5442.18	2537.23	2904.95	88435.37	4	7409.74	8138.93	-729.19	106535.26
5	5442.18	2526.72	2915.45	85519.92	5	7409.74	7609.66	-199.92	106735.18
6	5442.18	2515.29	2926.89	82593.04	6	7409.74	7115.68	294.06	106441.12
7	5442.18	2502.82	2939.36	79653.68	7	7409.74	6652.57	757.17	105683.95
8	5442.18	2489.18	2953.00	76700.68	8	7409.74	6216.70	1193.04	104490.91
9	5442.18	2474.22	2967.96	73732.72	9	7409.74	5805.05	1604.69	102886.22
10	5442.18	2457.76	2984.42	70748.30	10	7409.74	5415.06	1994.68	100891.54
11	5442.18	2439.60	3002.58	67745.72	11	7409.74	5044.58	2365.16	98526.37
12	5442.18	2419.49	3022.69	64723.03	12	7409.74	4691.73	2718.01	95808.36
13	5442.18	2397.15	3045.03	61678.00	13	7409.74	4354.93	3054.82	92753.55
14	5442.18	2372.23	3069.95	58608.06	14	7409.74	4032.76	3376.98	89376.57
15	5442.18	2344.32	3097.85	55510.20	15	7409.74	3724.02	3685.72	85690.85
16	5442.18	2312.93	3129.25	52380.95	16	7409.74	3427.63	3982.11	81708.75
17	5442.18	2277.43	3164.74	49216.21	17	7409.74	3142.64	4267.10	77441.65
18	5442.18	2237.10	3205.08	46011.13	18	7409.74	2868.21	4541.53	72900.12
19	5442.18	2191.01	3251.17	42759.96	19	7409.74	2603.58	4806.17	68093.95
20	5442.18	2138.00	3304.18	39455.78	20	7409.74	2348.07	5061.67	63032.28
21	5442.18	2076.62	3365.56	36090.23	21	7409.74	2101.08	5308.67	57723.61
22	5442.18	2005.01	3437.16	32653.06	22	7409.74	1862.05	5547.69	52175.92
23	5442.18	1920.77	3521.41	29131.65	23	7409.74	1630.50	5779.24	46396.68
24	5442.18	1820.73	3621.45	25510.20	24	7409.74	1405.96	6003.78	40392.90
25	5442.18	1700.68	3741.50	21768.71	25	7409.74	1188.03	6221.71	34171.18
26	5442.18	1554.91	3887.27	17881.44	26	7409.74	976.32	6433.42	27737.76
27	5442.18	1375.50	4066.68	13814.76	27	7409.74	770.49	6639.25	21098.51
28	5442.18	1151.23	4290.95	9523.81	28	7409.74	570.23	6839.51	14259.00
29	5442.18	865.80	4576.38	4947.43	29	7409.74	375.24	7034.50	7224.50
30	5442.18	494.74	4947.43	0.00	30	7409.74	185.24	7224.50	0.00
Tot	163265.31	63265.31	100000.00		Tot	222292.24	122292.24	100000.00	
V.A.	100000.00	41737.30	58262.70		V.A.	100000.00	70089.79	29910.21	
Mont	400000.00	166949.19	233050.81		Mont	400000.00	280359.17	119640.83	

**Osservazione 1:** Nel caso di adozione del regime finanziario della **capitalizzazione semplice**, con epoca di **equilibrio finanziario corrispondente al tempo finale** (rif. **Piano 1**, basato sull'approccio proposto dagli Autori del presente testo e in [10, 11, 12]), il pagamento della quota interessi "in forma attualizzata", al tempo di scadenza della rata, equivale a pagare

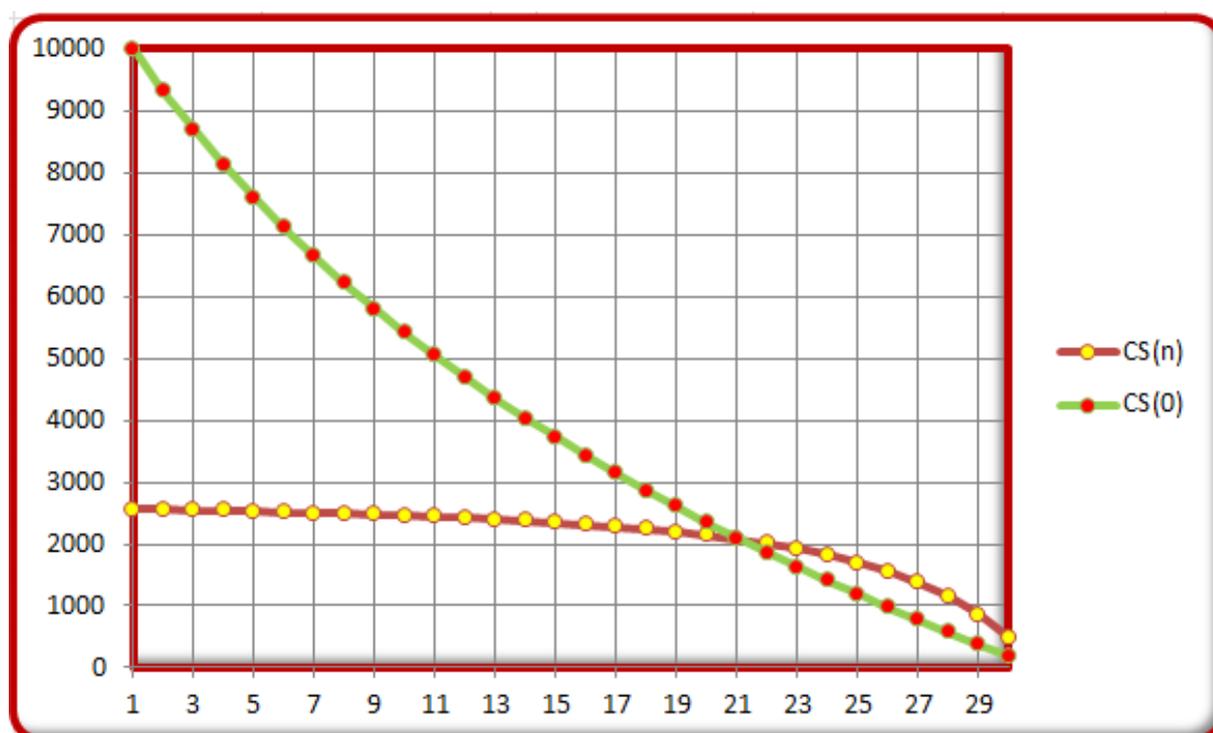
(incassare) in tale tempo il valore attuale (per un importo finanziariamente equivalente) dell'intera quota interessi dovuta al tempo finale.

**Osservazione 2:** Quanto sopra indicato per il **Piano 1** non si realizza nel caso di adozione del regime finanziario della **capitalizzazione semplice**, con epoca di **equilibrio finanziario corrispondente al tempo iniziale** (**Piano 2**, basato sull'approccio proposto dagli Autori Mari-Aretusi [48, 49]). In tale **Piano 2**, contrariamente al Piano 1, l'attualizzazione è tanto più consistente, quanto minore è l'ampiezza dell'intervallo di attualizzazione della quota interessi: tale aspetto è la causa dell'**anomalia** che si può presentare nella fisiologia del piano, anche in mancanza di situazioni patologiche. Detta anomalia, definita "**ammortamento improprio**" in Caliri[31], si manifesta nelle prime (nell'esempio: cinque) quote interessi che superano l'importo delle corrispondenti rate, generando un debito residuo, inizialmente crescente (per effetto delle quote di capitale negative), che solo dopo un certo numero (nell'esempio: dieci) di pagamenti di rate riesce a tornare al di sotto dell'importo iniziale del prestito.

**Nota:** Per gli articoli di riferimento si consulti "Le controversie Bancarie", num 11, 12, 13, 16, 32, 33 (in corso di stampa).

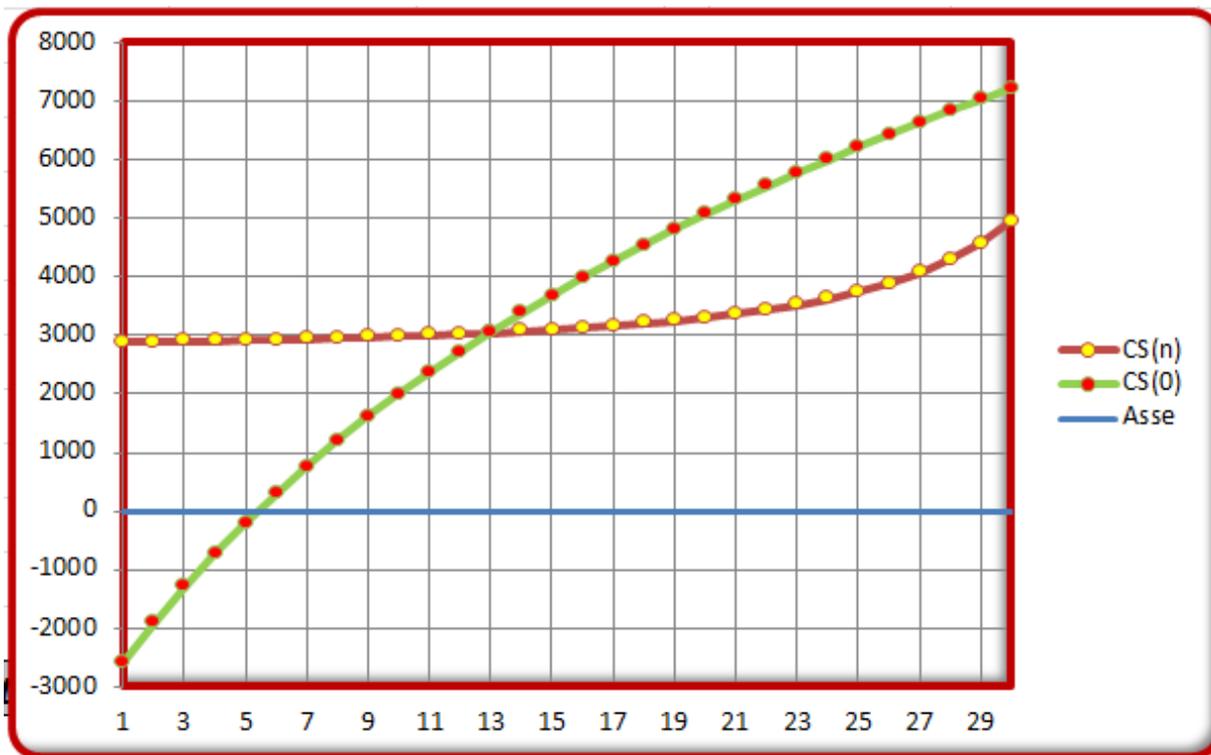
### **Grafico dell'andamento delle quote interessi**

Nota: le prime (nell'esempio: cinque) quote interessi superano l'importo delle corrispondenti rate ...



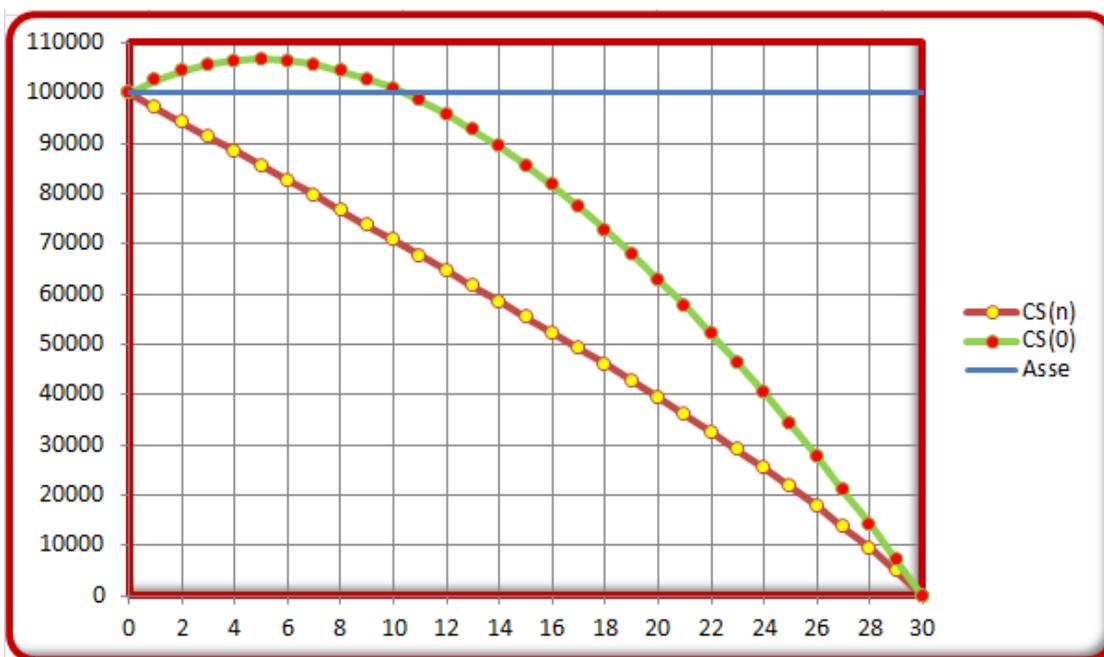
### **Grafico dell'andamento delle quote capitale**

Nota: ... generando altrettante quote capitale negative ...



**Grafico dell'andamento dei debiti residui**

*Nota: ... e un debito residuo, inizialmente crescente (per effetto delle quote di capitale negative), che solo dopo un certo numero (nell'esempio=: dieci) di pagamenti di rate riesce a tornare al di sotto dell'importo iniziale del prestito.*



**Nota sul problema inverso**

*Supponendo di conoscere come dati del problema: l'importo iniziale del prestito  $D_0$ , il numero delle rate  $n$  e la rata costante  $R$ , la ricerca del tasso interno nel regime della capitalizzazione semplice si realizza risolvendo (rispetto al tasso di interesse  $i^{\#}$ ) le relazioni, in base alle quali*

sono state definite le rate di ammortamento in capitalizzazione semplice nelle due possibilità di scelta dell'epoca (**finale** oppure **iniziale**) di equilibrio finanziario

$$R = \frac{D_0(1 + i^\# n)}{n \left(1 + i^\# \frac{n-1}{2}\right)} \quad R = D_0 \left( \sum_{k=1}^n (1 + i^\# k)^{-1} \right)^{-1}$$

In particolare, con riferimento alla prima formula (relativa al caso di epoca di equilibrio finale) risulta

$$i^\# = \frac{R - \frac{D_0}{n}}{D_0 - R \frac{n-1}{2}}$$

e per la positività del tasso e la coerenza dell'importo della rata deve risultare

$$\begin{cases} R > \frac{D_0}{n} \\ R \frac{n-1}{2} < D_0 \end{cases} \Rightarrow \frac{D_0}{n} < R < \frac{2D_0}{n-1}$$

che rappresenta l'intervallo di accettabilità della rata di ammortamento. Con riguardo all'esempio precedentemente considerato, risulta  $3333.33 < R < 6896.55$ .

In particolare, con riferimento alla seconda formula (relativa al caso di epoca di equilibrio iniziale), non essendo possibile ricavare esplicitamente il tasso di interesse  $i^\#$ , tale ricerca deve essere effettuata con metodi numerici

### **Estratto di Bibliografia**

- [1] **Annibali Antonio, Annibali Alessandro, Barracchini Carla, Olivieri Francesco** – “Capitalizzazione composta # Capitalizzazione semplice. Come dedurre un piano di ammortamento in capitalizzazione semplice (con epoca di equivalenza finanziaria corrispondente al tempo finale dell'operazione) (CS.f) dal corrispondente piano predisposto in capitalizzazione composta (CC)”. Rivista mensile: Le controversie Bancarie, Attualità di Giurisprudenza, Dottrina e casi pratici, anno IV, n. 32, aprile 2020 ISSN 2611-0083 E-246934
- [10] **Annibali Antonio, Annibali Alessandro, Barracchini Carla, Olivieri Francesco** – “Rivisitazione del modello di calcolo dell'ammortamento “alla francese” di un mutuo in capitalizzazione semplice. Complementi 2”, Rivista mensile: Le controversie Bancarie, Attualità di Giurisprudenza, Dottrina e casi pratici, anno II, num. 13, settembre 2018 ISSN 2611-0083
- [11] **Annibali Antonio, Annibali Alessandro, Barracchini Carla, Olivieri Francesco** – “Rivisitazione del modello di calcolo dell'ammortamento “alla francese” di un mutuo in capitalizzazione semplice. Complementi”, Rivista mensile: Le controversie Bancarie, Attualità di Giurisprudenza, Dottrina e casi pratici, anno II, num. 12, agosto 2018 ISSN 2611-0083
- [12] **Annibali Antonio, Annibali Alessandro, Barracchini Carla, Olivieri Francesco** –

*“Rivisitazione del modello di calcolo dell’ammortamento di un mutuo “alla francese” in capitalizzazione semplice”, Rivista mensile: Le controversie Bancarie, Attualità di Giurisprudenza, Dottrina e casi pratici, anno II, num. 10, giu 2018 ISSN 2611-0083*

**[31] Caliri Maria (1998)** – Appunti di Matematica Finanziaria, Giappichelli Editore, Torino

**[48] Mari Carlo –Aretusi Graziano (2019)**, *“Sull’ammortamento dei prestiti in regime composto e in regime semplice. Alcune considerazioni concettuali e metodologie”* Il Risparmio, Rivista trimestrale dell’ACRI Associazione di Fondazioni e di Casse di Risparmio SpA anno LXVII, n.1 gennaio –marzo 2019

**[49] Mari Carlo –Aretusi Graziano (2018)**, *“Sull’esistenza e unicità dell’ammortamento dei prestiti in regime lineare”* Il Risparmio, Rivista trimestrale dell’ACRI Associazione di Fondazioni e di Casse di Risparmio SpA anno LXVI, n.1 gennaio –luglio 2018